Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 138.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1910.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 138.

	Seite
Faber, G., Über die *Newton*sche Näherungsformel	1— 21
Fejér, L., *Lebesgue*sche Konstanten und divergente *Fourier*reihen	22— 53
Fraenkel, A., Die Berechnung des Osterfestes	133—146
Hettner, G., Die Gleichung der *Schwarz*schen Minimalfläche in ihrem Zusammenhange mit den hyperelliptischen Thetafunktionen	54— 76
Horn, J., Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen . . .	159—191
Jung, H. W. E., Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche	77— 95
— — Über die *Cremona*sche Transformation der Ebene	255—318
Knopp, K., Grenzwerte von *Dirichlet*schen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze	109—132
Koebe, P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Erster Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip	192—253
Thomé, L. W., Über eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf partielle Differentialgleichungen. . . .	147—158
Thue, A., Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen	96—108

220901

Über die *Newton*sche Näherungsformel.

Von Herrn *G. Faber* in Tübingen.

Die folgenden Ausführungen sollen teils zur Ergänzung, teils zur Vereinfachung der Theorie der *Newton*schen Näherungsformel einen Beitrag liefern. Die Untersuchung wird der Hauptsache nach für Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen geführt; jedoch wird auch auf die Besonderheiten des *reellen* Gebiets vielfach eingegangen.

1. *Vorbemerkung.*

Es sei eine Gleichung $f(x)=0$ vorgelegt; $f(x)$ werde der Einfachheit halber als analytische Funktion vorausgesetzt, solange diese Voraussetzung nicht ausdrücklich durch eine andere ersetzt wird. x_1 sei eine willkürliche reelle oder komplexe Zahl; wir bezeichnen sie als den ersten Näherungswert; aus diesem erhalten wir in bekannter Weise den zweiten Näherungswert x_2 durch die Gleichung

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \tag{1.}$$

und allgemein erhalten wir den i-ten Näherungswert x_i aus dem $(i-1)$-ten durch die Gleichung

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}. \tag{2.}$$

Die nächsten und wichtigsten Fragen sind dann die folgenden: *Erstens:* Existiert ein Grenzwert

$$\bar{x} = \lim_{i=\infty} x_i\,? \tag{3.}$$

Zweitens: Ist in diesem Falle $\bar{x}$ eine Nullstelle der Funktion $f(x)$?

Da von den unendlichen Algorithmen die Reihen uns am geläufigsten sind, setzen wir den zu untersuchenden Grenzausdruck auf der rechten Seite von (3.) in die Form der unendlichen Reihe:

$$(4.) \qquad x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots$$

oder

$$(4'.) \qquad u_1+u_2+u_3+\cdots,$$

wo $u_1=x_1$ und für $i>1$ $u_i=x_i-x_{i-1}$ gesetzt ist.

Wenn einer der Näherungswerte x_i Nullstelle von $\frac{f(x)}{f'(x)}$, also Nullstelle von $f(x)$ oder Unendlichkeitsstelle von $f'(x)$ ist, so ist offenbar $x_i=x_{i+1}=x_{i+2}=\cdots=\bar{x}$. *Dieser Fall uneigentlicher* Konvergenz bietet weiter kein Interesse und *wird im folgenden ausgeschlossen.*

Indem ich die Untersuchung der ersten der obigen Fragen den nächsten Abschnitten vorbehalte, gehe ich zuerst auf die zweite ein, mache also die *Voraussetzung*, daß das Verfahren nach einer bestimmten endlichen Zahl $\bar{x}$ eigentlich konvergiere; dann ist $\lim\limits_{i=\infty} u_i=\lim\limits_{i=\infty}\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=0$; $\bar{x}=\lim\limits_{i=\infty} x_i$ *ist also entweder eine Nullstelle der Funktion* $\frac{f(x)}{f'(x)}$ *oder eine Stelle, an der* $\frac{f(x)}{f'(x)}$ *keinen bestimmten Wert annimmt.* Daß der letztere Fall tatsächlich eintreten kann, ist leicht einzusehen. Man kann z. B. eine Funktion $f(x)$ mit der einen wesentlich singulären Stelle $x=0$ konstruieren, welche an jeder Stelle $x=\frac{1}{2^\nu}$ $(\nu=1, 2\ldots)$ den Wert 1 annimmt, während $f'\left(\frac{1}{2^\nu}\right)$ allemal gleich $2^{\nu+1}$ ist. Geht man nun von der ersten Näherung $x_1=\frac{1}{2}$ aus, so ergibt sich $x_2=\frac{1}{4}$, $x_i=\frac{1}{2^i}$, also $\bar{x}=\lim\limits_{i=\infty} x_i=0$, ohne daß $\frac{f(x)}{f'(x)}$ oder gar $f(x)$ für $x=0$ der Null zustreben würde.

Die zweite Möglichkeit ist die, daß an der Stelle $\bar{x}$, nach der das Verfahren konvergiert, $\frac{f(x)}{f'(x)}$ einen bestimmten Wert, also wegen der vorausgesetzten Konvergenz den Wert Null $\left(=\lim\limits_{i=\infty}\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)$ annimmt; die Stelle $\bar{x}$ mag eine Verzweigungsstelle endlicher*) Ordnung oder eine unverzweigte

*) Auf Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung, in deren Umgebung das Verhalten einer analytischen Funktion noch nicht genügend untersucht ist, gehe ich nicht ein.

Stelle der Funktion $f(x)$ sein. Es wäre dann zunächst denkbar, daß $\bar{x}$ *entweder* eine Nullstelle von $f(x)$ *oder* eine solche von $\frac{1}{f'(x)}$ wäre. (Man könnte beispielsweise an $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+1$, $\bar{x}=0$ denken.) Doch wird sich der letztere Fall als unmöglich herausstellen (s. § 3), also: *Wenn die Newtonsche Näherungsformel nach einer regulären Stelle oder algebraischen Verzweigungsstelle $\bar{x}$ der analytischen Funktion $f(x)$ konvergiert, so ist $\bar{x}$ eine Nullstelle von $f(x)$.*

Naturgemäß erhebt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen für eine *nicht analytische*, stetige, differenzierbare Funktion $f(x)$ ebenso der Satz gilt, daß die durch Konvergenz der *Newton*schen Methode gefundene Stelle $\bar{x}$ eine Nullstelle von $f(x)$ ist.

Man betrachte zunächst die vorhin gebildete Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x=\frac{1}{2^\nu}$ stets gleich 1 ist, während $f'\left(\frac{1}{2^\nu}\right)=2^{\nu+1}$ ist; man kann annehmen, daß diese Funktion für alle reellen x stetig ist und daß sie auch für alle x außer für $x=0$ einen endlichen stetigen Differentialquotienten besitzt. Man sieht also an diesem Beispiel, daß die soeben ausgesprochenen Bedingungen nicht genügen, damit die von der konvergenten *Newton*schen Näherungsformel gelieferte Stelle $\bar{x}$ eine Nullstelle der stetigen Funktion $f(x)$ sei; doch genügt es, die weitere Voraussetzung zu machen, daß $f'(x)$ in der Umgebung der Stelle $\bar{x}$ nicht unendlich viele Maxima und Minima besitze. Angenommen diese Bedingungen seien erfüllt und die *Newton*sche Näherungsmethode konvergiere nach $\bar{x}$, es sei aber $f(\bar{x})\neq 0$, sondern etwa $=1$. Sind dann x_1 und x_2 zwei auf der gleichen Seite von $\bar{x}$ gelegene Werte der Umgebung von $\bar{x}$, so ergibt sich $\log\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$. Läßt man hier x_1 nach $\bar{x}$ konvergieren, so konvergiert die linke Seite nach $\log f(x_2)$; das Integral auf der rechten Seite muß daher für $x_1=\bar{x}$ einen Sinn behalten, trotzdem der Integrand dem absoluten Betrage nach beliebig groß wird, da ja $\lim_{i=\infty}\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=0$ ist. Daraus folgt dann mit Benutzung der zuletzt noch gemachten Bedingung, daß $\lim_{x=\bar{x}}\frac{|x-\bar{x}|\,|f'(x)|}{|f(x)|}=0$ sein muß*). Es gibt also eine Umgebung der Stelle

*) *Pringsheim*, Math. Ann. Bd. 37, S. 593.

$x=\bar{x}$, die durch $|x-\bar{x}|<\varepsilon$ bezeichnet sein möge, für welche $\frac{|f(x)|\cdot}{|x-\bar{x}|\,|f'(x)|}>2$ ist. Liegt nun der i-te Näherungswert x_i in dieser Umgebung, so ist

$$\begin{aligned}|x_{i+1}-\bar{x}| &= \left|x_i-\bar{x}-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right| \\ &> |x_i-\bar{x}|\left|1-\frac{|f(x_i)|}{|x_i-\bar{x}|\,|f'(x_i)|}\right| \\ &> |x_i-\bar{x}|,\end{aligned}$$

d. h. x_{i+1} liegt weiter entfernt von $\bar{x}$ als x_i; ist $|x_{i+1}-\bar{x}|$ noch nicht $>\varepsilon$, so ist auch $|x_{i+2}-\bar{x}|>|x_{i+1}-\bar{x}|$ usw.; die Näherungswerte x_{i+1}, $x_{i+2}\ldots$ entfernen sich also, sobald einmal einer in die durch die Ungleichung $|x-\bar{x}|<\varepsilon$ bezeichnete Umgebung der Stelle $\bar{x}$ gelangt ist, von letzterer Stelle mindestens so lange, bis ein Näherungswert außerhalb jener Umgebung fällt. Damit ist gezeigt, daß die *Newton*sche Methode unter den gemachten Annahmen nicht nach $\bar{x}$ konvergieren kann, daß also der von *der Newtonschen Näherungsmethode gelieferte Grenzwert stets eine Nullstelle der reellen Funktion $f(x)$ sein muß, falls nur $f(x)$ und $f'(x)$ die angegebenen Bedingungen erfüllen.*

2. *Konvergenzuntersuchung.*

Es handle sich jetzt wieder um analytische Funktionen. Um die Konvergenz der *Newton*schen Näherungsmethode zu untersuchen, bilde man den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder der Reihe (4):

$$(5.)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}:\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=\frac{f\left(x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)}{f'\left(x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)}:\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Auf diesen Quotienten wollen wir den *Darboux*schen Mittelwertsatz für Funktionen einer komplexen Veränderlichen anwenden, der besagt, daß

$$(6.)\qquad F(a+h)=F(a)+\lambda h\,F'(a+\vartheta h)\quad (0<\vartheta<1,\ |\lambda|\leqq 1)$$

ist. Vorausgesetzt ist dabei, daß für alle x der Strecke von a bis $a+h$ der Differentialquotient $F'(x)$ eindeutig und endlich ist, wodurch nicht ausgeschlossen ist, daß auf jener Strecke eine Verzweigungsstelle der Funktion $F(x)$ liegt (z. B. $F(x)=\sqrt[3]{x^4}$, $a=-1$, $h=2$). Singuläre Stellen zwischen a und $a+h$ kann man auch dadurch umgehen, daß man den *Darboux*schen Mittelwertsatz folgendermaßen modifiziert: Man verbinde a mit $a+h$ durch

eine Kurve von der Länge $s=|h|+\varepsilon$; dann gilt die Beziehung (6.) in der veränderten Auffassung, daß man unter $a+\vartheta h$ eine Stelle jener Kurve und unter λ eine komplexe Zahl zu verstehen hat, die dem absoluten Betrage nach $\leqq\frac{s}{|h|}$ ist. Für unsere Zwecke empfiehlt sich statt (6.) eine andere Form des Mittelwertsatzes, die man aus (6.) erhält, wenn man für $F(a+h)$ die Funktion $F(a+h)-(a+h)$ substituiert; dann erhält man:

$$F(a+h)-(a+h)=F(a)-a+\lambda h(F'(a+\vartheta h)-1)$$

oder

$$F(a+h)=F(a)+\lambda h(F'(a+\vartheta h)-1)+h. \tag{7.}$$

Wendet man diese Form auf $F(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$, $a=x_{n-1}$, $h=-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ an, so ergibt sich

$$\frac{f\left(x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)}{f'\left(x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)}=\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$-\lambda\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\left[1-\frac{f\left(x_{n-1}-\vartheta\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)f''\left(x_{n-1}-\vartheta\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)}{f'\left(x_{n-1}-\vartheta\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)^2}-1\right]-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \tag{8.}$$

also

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\lambda\frac{f(x_{n-1}+\vartheta(x_n-x_{n-1}))\,f''(x_{n-1}+\vartheta(x_n-x_{n-1}))}{[f'(x_{n-1}+\vartheta(x_n-x_{n-1}))]^2}. \tag{9.}$$

Nun konvergiert aber nach einem bekannten *Cauchy*schen Satze die unendliche Reihe Σu_n absolut, wenn $\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$ ist. Hieraus und aus (9.) ergibt sich nun leicht der Beweis des folgenden Satzes:

Existiert eine positive Zahl $\alpha<1$ der Art, daß innerhalb des um den Punkt x_1 der komplexen Ebene mit dem Radius $R=\frac{1}{1-\alpha}\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|$ beschriebenen Kreises K

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}\right|<\alpha \tag{10.}$$

ist, so konvergiert die Newtonsche Näherungsmethode mit dem ersten Näherungswert x_1 nach einer innerhalb K gelegenen Nullstelle von $f(x)$.

Da $|x_2-x_1|=\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|<R$ ist, liegt der Punkt x_2 innerhalb des Kreises K, und es ist daher wegen (9.), (10.):

$$|x_3-x_2|<|x_2-x_1|\,\alpha<\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|\alpha,$$

demnach

$$|x_3-x_1|<|x_3-x_2|+|x_2-x_1|<\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|(\alpha+1),$$

d. h. x_3 liegt auch innerhalb K; deshalb ist

$$|x_4-x_3|<|x_3-x_2|\,\alpha<\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|\alpha^2,$$

also

$$|x_4-x_1|<|x_4-x_3|+|x_3-x_2|+|x_2-x_1|<\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|(\alpha^2+\alpha+1),$$

d. h. x_4 liegt innerhalb K; allgemein ergibt sich so:

$$|x_{n+1}-x_n|=|u_{n+1}|<\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|\alpha^{n-1},\ \text{d. h. } x_{n+1}\ \text{innerhalb } K,$$

so daß also die Reihe (4.) nach den gemachten Voraussetzungen konvergiert $\left(\text{sie hat die Reihe } \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|(1+\alpha+\alpha^2+\cdots)\ \text{zur Majorante}\right)$ und zwar nach einer Zahl $\bar{x}$, die innerhalb von K liegt und Nullstelle von $\frac{f(x)}{f'(x)}$ ist.

Der Beweis gilt übrigens nicht nur für den zunächst vorausgesetzten Fall, daß $f(x)$ sich innerhalb K regulär verhält, sondern auch wenn innerhalb K algebraische Verzweigungsstellen liegen; der Kreis K ist dann über mehrere Blätter der *Riemann*schen Fläche für $f(x)$ zu erstrecken; daß auch in diesem Falle $\bar{x}$ Nullstelle von $f(x)$, nicht nur von $\frac{f(x)}{f'(x)}$ ist, folgt aus den Entwicklungen des nächsten Paragraphen.

Im reellen Gebiet genügt es, statt des analytischen Charakters zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion $f(x)$ vorauszusetzen; man gelangt hier, wenn man noch $\alpha=\frac{1}{2}$ annimmt, zu folgender *Aussage, die in vielen Fällen geeignet ist, den Rechner schon nach der Berechnung des zweiten Näherungswertes x_2 von der schließlichen Konvergenz des Verfahrens zu überzeugen*:

Das Newtonsche Verfahren konvergiert, sobald zwischen x_1 und $x_1-2\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ der Quotient $\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right|<\frac{1}{2}$ ist, nach einer zwischen x_1 und $x_1-2\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ gelegenen Nullstelle von $f(x)$.

Ferner ergibt sich folgender Satz:

Ist $\bar{x}$ eine reguläre oder eine algebraische Verzweigungsstelle der analytischen Funktion $f(x)$, ist $\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}=0$ und $\left|\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}\right|<1$, so existiert eine gewisse Umgebung S der Stelle $\bar{x}$ der Art, daß die Newtonsche Näherungsmethode nach $\bar{x}$ konvergiert, sobald der erste Näherungswert x_1 beliebig innerhalb S gewählt wurde; ist dagegen $\left|\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}\right|>1$, so kann die Newtonsche Näherungsmethode nie nach $\bar{x}$ konvergieren. (Der triviale Fall $\bar{x}=x_i=x_{i+1}=\cdots$ wurde ausdrücklich ausgeschlossen.) Ich beweise zuerst den ersten Teil des Satzes; es existiert dann um den Punkt $\bar{x}$ ein Kreis mit dem Radius R, innerhalb dessen $\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right|<\alpha<1$ ist und innerhalb dessen außer $\bar{x}$ keine Nullstelle der Funktion $\frac{f(x)}{f'(x)}$ liegt; ferner existiert ein Kreis mit dem Radius r um $\bar{x}$, innerhalb dessen $\frac{\alpha}{1-\alpha}\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|<\frac{R}{2}$ ist, und es ist erlaubt $r\leqq\frac{R}{2}$ vorauszusetzen. Nimmt man nun innerhalb des letzteren Kreises x_1 willkürlich an, so ist innerhalb des um x_1 beschriebenen Kreises mit dem Radius $\frac{\alpha}{1-\alpha}\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|$ der Quotient $\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right|<\alpha$, also konvergiert nach dem Satze von S. 5 die *Newton*sche Näherungsmethode nach einer Nullstelle von $\frac{f(x)}{f'(x)}$, die mit $\bar{x}$ identisch sein muß, da das Verfahren nie außerhalb des Kreises mit dem Radius R hinausführt und da innerhalb dieses Kreises $\bar{x}$ die einzige Nullstelle ist. Ist dagegen $\left|\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}\right|>1$, so führt die Annahme, daß die *Newton*sche Näherungsmethode nach $\bar{x}$ konvergiert, auf einen Widerspruch; es müßte nämlich wegen der Stetigkeit und gleichmäßigen Differenzierbarkeit analytischer Funktionen von einer bestimmten Zahl n ab und für genügend kleine Werte von h der Quotient $\frac{\frac{f(x_{n-1}+h)}{f'(x_{n-1}+h)}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}{h}$ sich von $1-\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}$ beliebig wenig unterscheiden (bzw. beliebig groß sein, falls $\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}=\infty$ ist), und da ja im Falle der Konvergenz $\lim_{n=\infty}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=0$ ist, kann man $h=\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ setzen, und es müßte

$$\lim_{n=\infty} \frac{f\left(x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)}{f'\left(x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = 1 - \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}$$

sein, d. h. es wäre $\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}$, also dem absoluten Betrage nach größer als 1, was der Annahme, daß Konvergenz stattfindet, widerspricht.

Aus der zuletzt gemachten Bemerkung, daß im Falle der Konvergenz

$$(10'.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}$$

ist, sollen nun bezüglich des Grades der Konvergenz weitere Folgerungen gezogen werden.

3. *Grad der Konvergenz.*

Ich nehme an, $\bar{x}$ sei ein Verzweigungspunkt, in dem q Blätter zusammenhängen, $f(x)$ sei also in der Umgebung von $\bar{x}$ eine eindeutige Funktion $\varphi(t)$ von $t = (x-\bar{x})^{\frac{1}{q}}$, die im Punkte $t=0$ höchstens eine außerwesentlich singuläre Stelle hat. Wenn $f(\bar{x})$ endlich und von Null verschieden ist, wird, wie man leicht sieht, entweder $\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \neq 0$, oder zum mindesten $\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x}),}{(f'(\bar{x}))^2} = \infty$, jedenfalls kann dann die *Newton*sche Methode nicht nach $\bar{x}$ konvergieren. Ich betrachte nun den Fall, daß $f(\bar{x}) = 0$ oder $= \infty$ ist:

$$(11.) \qquad f(x) = a(x-\bar{x})^p + \cdots,$$

wo die nicht ausgeschriebenen Glieder höhere Exponenten als p haben und p rational $\neq 0$ ist; $p=1$ wird einstweilen ausgeschlossen. Es ergibt sich

$$\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2} = \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p-1}{p}.$$

Damit die *Newton*sche Methode nach $\bar{x}$ konvergieren kann, muß nach dem vorigen Satze $\left|\frac{p-1}{p}\right| \leqq 1$, also $p \geqq \frac{1}{2}$ sein. Ob im Falle $p = \frac{1}{2}$ Konvergenz möglich ist, bleibe dahingestellt; daß dagegen Divergenz eintreten kann, wie auch die erste Näherung x_1 gewählt sei, zeigt schon das Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$, $\bar{x} = 0$, bei welchem sich immer $|x_{i+1}| = |x_i|$ ergibt.

Nennt man noch $\bar{x}$ eine Nullstelle von der Ordnung α, wenn $f(x)=a(x-\bar{x})^{\alpha}+\cdots$ ist, dann kann man nunmehr folgendes Resultat aussprechen:

Ist $\bar{x}$ eine unverzweigte oder algebraisch verzweigte Stelle der analytischen Funktion $f(x)$, so konvergiert die Newtonsche Näherungsmethode nie nach $\bar{x}$, wenn $f(\bar{x})\neq 0$ oder wenn $f(\bar{x})=0$ von einer Ordnung $<\frac{1}{2}$ ist; wird dagegen $f(\bar{x})$ von einer Ordnung $\alpha>\frac{1}{2}$ gleich Null, so existiert eine gewisse Umgebung S der Stelle $\bar{x}$ der Art, daß die Newtonsche Näherungsmethode nach $\bar{x}$ konvergiert, sobald die erste Näherung x_1 willkürlich innerhalb S gewählt wurde. Ist $\alpha\neq 1$, so ist die Konvergenz von der Art derjenigen der geometrischen Reihe $\sum_1^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\nu}$. Da $\lim_{n=\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{\alpha-1}{\alpha}$ reell ist, weicht die Verbindungslinie der Punkte x_{n+1} und x_n schließlich beliebig wenig von derjenigen der Punkte x_n und x_{n-1} ab; man zeigt leicht, daß sogar sämtliche Punkte $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots \bar{x}$ für genügend großes n mit beliebiger Annäherung in eine Gerade fallen. Ist die Ordnung α der Nullstelle $\bar{x}$ größer als 1, so ist der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für genügend großes n angenähert positiv (d. h. der über den Imaginärteil überwiegende Realteil von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist größer als 0), ist dagegen $\alpha<1$, so ist jener Realteil negativ; im ersteren Fall geschieht die Annäherung an $\bar{x}$ immer von derselben Seite her, im letzteren liegt $\bar{x}$ zwischen x_n und x_{n+1}.

Die Konvergenz ist eine um so bessere, je näher die Ordnung α der Nullstelle $\bar{x}$ der Einheit liegt; ist $\alpha=1$, was der praktisch wichtigste Fall ist, so ist die Konvergenz stärker, wie die irgendeiner geometrischen Progression. Diesen Fall will ich nunmehr näher untersuchen. Setzt man wieder $x-\bar{x}=t$, so ist jetzt $f(x)=at+bt^{1+\gamma}+\cdots$ $(\gamma>0)$, also $f'(x)=a+b(1+\gamma)t^{\gamma}+\cdots$,

$$(12.)\quad \frac{f(x)}{f'(x)}=t-\frac{b}{a}\gamma t^{1+\gamma}+\cdots,\quad x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\bar{x}+t-t+\frac{b}{a}\gamma t^{1+\gamma}+\cdots,$$

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=b\gamma t^{1+\gamma}+\cdots,\quad f'\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=a+\cdots,$$

$$(13.)\quad \frac{f\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}:\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{b}{a}\gamma t^{\gamma}+\cdots,$$

$$(13'.)\qquad \frac{f\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}:\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{b}{a}\gamma\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^{\gamma}+\cdots \quad \text{[nach (12.)]}.$$

Nach dem bisher bewiesenen konvergiert in unserm Falle die *Newton*sche Methode, sobald x_1 nahe genug an $\bar{x}$ gewählt ist; setzt man unter dieser Voraussetzung $x=x_{n-1}$, so erhält man aus (13.) und (13'.):

$$(14.)\qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{b}{a}\gamma\right||u_n|^{\gamma}(1+\varepsilon_n) \text{ mit } \lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0.$$

Als Vergleichsreihe zur Reihe $\sum_0^{\infty\nu}|u_\nu|$ bieten sich im vorliegenden Falle Reihen der Form $\sum_0^{\infty\nu} c^\nu \beta^{(1+\gamma)^\nu}$, wo c und β positive Zahlen sind und β außerdem kleiner als 1 ist. Im übrigen kommt es auf die Werte von c und β nicht an; denn hält man zunächst β fest und betrachtet man die Reihe $\sum_0^{\infty\nu} c^\nu \beta^{(1+\gamma)^\nu}$ für zwei verschiedene Werte c_1 und $c_2>c_1$ von c, so ist das n-te Glied der Reihe

$$(15.)\qquad \sum_0^{\infty\nu} c_1^\nu \beta^{(1+\gamma)^\nu}$$

immer kleiner als das n-te Glied der Reihe

$$(16.)\qquad \sum_0^{\infty\nu} c_2^\nu \beta^{(1+\gamma)^\nu},$$

dagegen ist von einem bestimmten n an das n-te Glied von (15.) immer größer als das $(n+1)$-te von (16.), wie man leicht beweist. Ich setze nun $c=1$ und vergleiche zwei Reihen mit verschiedenen Werten von β, nämlich $\beta=\beta_1$ und $\beta=\beta_2>\beta_1$; dann existiert, wie man ebenfalls ohne jede Schwierigkeit beweist, eine ganze Zahl k der Art, daß das $(n+k)$-te Glied der Reihe $\sum_0^{\infty\nu}\beta_2^{(1+\gamma)^\nu}$ immer kleiner ist als das n-te der Reihe $\sum_0^{\infty\nu}\beta_1^{(1+\gamma)^\nu}$.

Vergleichen wir nun damit die Reihe (4'.) $\sum_1^{\infty\nu} u_\nu$ unter der Voraussetzung, daß sie nach der einfachen isolierten Nullstelle $\bar{x}$ konvergiert. Der auf der rechten Seite von (14.) vorkommende Faktor $\left|\frac{b}{a}\gamma\right|(1+\varepsilon_n)$ hat eine endliche obere Grenze C und, sofern nur x_1 in einer gewissen Nachbarschaft der Stelle $\bar{x}$ gewählt wurde, eine von Null verschiedene untere Grenze c; n sei so groß, daß die Zahlen $\beta_1=|u_n c^{\frac{1}{\gamma}}|$ und $\beta_2=|u_n C^{\frac{1}{\gamma}}|$ kleiner als 1 sind. Aus (14.) folgt nun

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}| &> |u_n|^{1+\gamma} c, \\
|u_{n+2}| &> |u_{n+1}|^{1+\gamma} c, \\
|u_{n+3}| &> |u_{n+2}|^{1+\gamma} c, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|u_{n+m}| &> |u_{n+m-1}|^{1+\gamma} c.
\end{aligned} \tag{17.}
$$

Erhebt man von diesen m Ungleichungen die i-te in die Potenz mit dem Exponenten $(1+\gamma)^{m-i}$ $(i=1, 2, \ldots m)$ und multipliziert man dann die linken und die rechten Seiten bzw. miteinander, so erhält man $c^{\frac{1}{\gamma}} |u_{n+m}| > |u_n c^{\frac{1}{\gamma}}|^{(1+\gamma)^m} = \beta_1^{(1+\gamma)^m}$; genau so findet man $C^{\frac{1}{\gamma}} |u_{n+m}| < |u_n C^{\frac{1}{\gamma}}|^{(1+\gamma)^m} = \beta_2^{(1+\gamma)^m}$.

Vergleicht man damit das vorhin über Reihen $\sum_1^\infty{}_\nu \beta^{(1+\gamma)^\nu}$ gefundene Resultat, so gelangt man zu folgender Aussage, wo für β der zulässige Wert $\frac{1}{2}$ gesetzt wurde:

Ist $\bar{x}$ eine einfache Nullstelle der Funktion $f(x)$, also

$$f(x) = a(x-\bar{x}) + b(x-\bar{x})^{1+\gamma} + \cdots \quad (\gamma > 0),$$

so existiert eine gewisse Umgebung von $\bar{x}$ der Art, daß die Reihe (4.) *konvergiert, sobald x_1 in jener Umgebung beliebig gewählt wurde; die Konvergenz der Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu |u_\nu|$ ist dann von gleicher Art wie die der Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\gamma)^\nu}$, d. h. es existiert eine endliche Zahl k der Art, daß das n-te Glied der einen Reihe immer größer ist als das $(n+k)$-te, aber immer kleiner als das $(n-k)$-te der anderen Reihe.*

Bei den Anwendungen der *Newton*schen Formel wird γ meist gleich 1 sein; dann folgt aus (14.)

$$u_{n+1} = \frac{b}{a} u_n^2 (1+\varepsilon_n) = \frac{f''(\bar{x})}{2(f'(\bar{x}))} u_n^2 (1+\varepsilon_n), \tag{18.}$$

und daher erhält man für hinreichend großes n mit beliebiger Genauigkeit, wenn man $x_{n+1} - x_n$ für u_{n+1}, $x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ für x_n, endlich $\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ für u_n schreibt und zugleich statt $\bar{x}$ die benachbarte Zahl x_{n-1} einführt:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \left(1 - \frac{f(x_{n-1}) f''(x_{n-1})}{2(f'(x_{n-1}))^2}\right). \tag{19.}$$

Die einmalige Anwendung dieser Formel führt also im Falle einer einfachen Nullstelle $\bar{x}$ durchschnittlich ebensoweit als zweimalige Anwendung der Newtonschen Formel; für Nullstellen $\bar{x}$ von einer Ordnung $\leqslant 1$ gilt (19.) nicht; man hat dann nämlich nach (9′.):

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2}$, also mit schließlich beliebig großer Annäherung:

$$(20.) \qquad x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\left(1 - \frac{f(x_{n-1})f''(x_{n-1})}{(f'(x_{n-1}))^2}\right).$$

Weiß man von vornherein, daß man es mit einer Nullstelle zu tun hat, deren Ordnung $\neq 1$ ist, so ist weder die Anwendung der *Newton*schen Formel noch auch die von (20.) zu empfehlen, da man leicht zu unendlich viel rascher konvergenten Formeln gelangt. Ist nämlich $\bar{x}$ eine isolierte algebraische Nullstelle oder Unendlichkeitsstelle von $f(x)$, so ist $\bar{x}$ immer einfache Nullstelle von $\frac{f(x)}{f'(x)}$. Während man also bei Anwendung der *Newton*schen Näherung auf $f(x)$ Konvergenz nur nach Art einer geometrischen Progression erhält, oder gar Divergenz befürchten muß, selbst wenn man x_1 noch so nahe an $\bar{x}$ wählt (nämlich immer wenn $\bar{x}$ eine Unendlichkeitsstelle oder eine Nullstelle von einer Ordnung $< \frac{1}{2}$ ist), erhält man ein Verfahren, das rascher wie jede geometrische Progression konvergiert, wenn man die *Newton*sche Methode auf $\frac{f(x)}{f'(x)}$ anwendet; dies führt zu der Formel

$$(21.) \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} : \left(1 - \frac{f(x_{n-1})f''(x_{n-1})}{(f'(x_{n-1}))^2}\right)$$

$$= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})f'(x_{n-1})}{(f'(x_{n-1}))^2 - f(x_{n-1})f''(x_{n-1})}.$$

4. *Bemerkungen für den Fall reeller Funktionen.*

Bei reellen Funktionen hat man häufig zwei Näherungswerte a und b, zwischen denen eine einzige Nullstelle $\bar{x}$ der Funktion $f(x)$ liegt, und man hat dann die Aufgabe, $\bar{x}$ in engere Grenzen einzuschließen. Gewöhnlich macht man die unnötige und die Anwendbarkeit beschränkende Voraussetzung, daß zwischen a und b keine Nullstelle der Funktionen $f'(x)$ und $f''(x)$ liege; ich lasse im folgenden zu, daß $\bar{x}$ für $f'(x)$ oder für $f''(x)$ oder für beide Funktionen eine Nullstelle sei. Ich setze $\bar{x} = a + h = b + h_1$; dann erhält man nach dem Mittelwertsatze*):

*) Vgl. *Darboux,* Nouvelles Annales de Math. II Sér. T. 8. (1869).

$$f(\bar{x})=0=f(a)+hf'(a)+h^2\frac{f''(a+\vartheta h)}{1\cdot 2}=f(b)+h_1f'(b)+h_1^2\frac{f''(b+\vartheta_1 h_1)}{1\cdot 2}$$

$(0<\vartheta<1;\ 0<\vartheta_1<1)$, also

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2f''(a+\vartheta h)}{2\cdot f'(a)}, \tag{22.}$$

$$h_1=-\frac{f(b)}{f'(b)}-\frac{h_1^2f''(a+\vartheta_1 h_1)}{2\cdot f'(a)}. \tag{23.}$$

Es sind nun vier Fälle möglich, je nachdem $f(a)f''(a)\leqq 0$ und gleichzeitig $f(b)f''(b)\leqq 0$ ist. Ich behandle, da sich die anderen Vorzeichenkombinationen dann von selbst ebenso erledigen, ausführlich nur den einen:

$$f(a)f''(a)>0, \tag{24.}$$

$$f(b)f''(b)<0 \tag{25.}$$

und stelle mir die Aufgabe, an Stelle von a und b engere Grenzen, zwischen denen $\bar{x}$ liegt, zu finden.

Wegen (24.) sind die beiden Glieder auf der rechten Seite von (22.) gleichbezeichnet; der Näherungswert $a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$*) liegt daher auf der gleichen Seite und näher an $\bar{x}$ als a**); dagegen macht man die an a anzubringende Korrektur offenbar dem absoluten Betrage nach zu groß, so daß man also über $\bar{x}$ hinausgelangt, wenn man auf der rechten Seite von (22.) h^2 durch $(b-a)^2$ und gleichzeitig $f''(a+\vartheta h)$ durch die gleichbezeichnete, aber dem absoluten Betrage nach größere Zahl $m\cdot\operatorname{sign}[f''(a)]$ ersetzt, wo $m\geqq|f''(x)|$ für alle x zwischen a und b ist und unter sign $[x]$ je nach dem Vorzeichen von x der Faktor ± 1 verstanden ist; man hat also

$$b_2=a-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{m(b-a)^2}{1\cdot 2f'(a)}\ \operatorname{sign}[f''(a)];$$

b_2 muß übrigens nicht notwendig näher an $\bar{x}$ liegen als b; dies tritt nur ein, wenn

$$|b_2-a|<|b-a|,\ \text{d. h.}$$

---

*) Unter $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ verstehe ich Zahlen, die bzw. auf der gleichen Seite von $\bar{x}$ liegen wie a und b.

**) Daraus folgt sofort, daß die *Newton*sche Methode mit der ersten Näherung a nach der Nullstelle $\bar{x}$ konvergiert, sobald $f(a)f''(a)>0$ ist und zwischen a und $\bar{x}$ weder von $f'(x)$ noch von $f''(x)$ eine Nullstelle liegt.

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| + \frac{m(b-a)^2}{2|f'(a)|} < |b-a| \text{ ist.}$$

Die Zahl $a_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ liegt auf der gleichen Seite von $\bar{x}$ wie a; denn einerseits ist klar, daß das Vorzeichen von h_1 dasjenige von $-\frac{f(b)}{f'(b)}$ ist, andererseits hat wegen (25.) das zweite Glied auf der rechten Seite von (23.) das entgegengesetzte Zeichen wie das erste, so daß also die Korrektur $-\frac{f(b)}{f'(b)}$ dem absoluten Betrage nach zu groß ausfällt und daher auf die Seite von $\bar{x}$ führt, auf der a liegt. Man kann aus (23.) eine auf der Seite von b liegende Näherung b_1 finden, wenn man das zweite Glied auf der rechten Seite, statt es wegzulassen, durch ein gleichbezeichnetes, aber dem absoluten Betrage nach größeres ersetzt, z. B. durch $\frac{(b-a)^2 m}{1 \cdot 2 f'(b)}$ sign $[f''(b)]$ oder durch $\frac{(f(b))^2 m}{2(f'(b))^3}$ sign $[f''(b)]$; man erhält so

(26.)
$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{m(b-a)^2}{2f'(b)} \text{ sign } [f''(b)], \text{ bzw.}$$

$$b_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{m(f(b))^2}{2(f'(b))^3} \text{ sign } [f''(b)]$$

$$= b - \frac{f(b)}{f'(b)}\left[1 - \frac{m|f(b)|}{2(f'(b))^2}\right] \text{ (wegen (25.)).}$$

b_1 bzw. b_1' ist nur dann eine bessere Näherung als b, wenn $\left|\frac{m(b-a)^2}{2f'(b)}\right| < \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|$ ist, bzw. wenn $\frac{m|f(b)|}{2(f'(b))^2} < 1$ ist; die letztere Ungleichung ist sicher erfüllt, wenn b nahe genug an $\bar{x}$ liegt.

Durch Zusammenfassung der erhaltenen Resultate ergibt sich die Regel:

Hat man zwei Zahlen a und b, zwischen denen eine Wurzel $\bar{x}$ der Gleichung $f(x)=0$, aber keine von $\bar{x}$ verschiedene Wurzel der Gleichungen $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ liegt, sind ferner beispielsweise $f(a)$ und $f''(a)$ gleichbezeichnet, dagegen $f(b)$ und $f''(b)$ verschieden bezeichnet und versteht man endlich unter m eine Zahl $\geqq |f''(x)|$ für alle x zwischen a und b, so erhält man als neue Grenzen, zwischen denen $\bar{x}$ liegt, die folgenden:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{m(a-b)^2}{2f'(b)} \text{ sign } [f''(b)],$$

$$b_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}\left[1 - \frac{m|f(b)|}{2(f'(b))^2}\right], \text{ oder}$$

$$a_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad b_2 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(b-a)^2 m}{2f'(a)} \text{ sign } [f''(a)].$$

Man vergleiche damit die ziemlich verwickelte Ableitung eines weniger genauen und weniger allgemeinen Resultats bei *Serret*, Lehrbuch der Höheren Algebra, deutsche Übers. von *Wertheim*, Bd. 1, S. 285; die *Serret*schen Werte für a_1, b_1 lassen sich aus den obigen unschwer ableiten.

5. *Stets konvergente Näherungsmethoden für algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln.*

Die Gleichung n-ten Grades $f(x)=0$ habe lauter reelle Wurzeln, darunter $l (\leqq n)$ untereinander verschiedene; die Funktion $F(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ hat dann die gleichen l Nullstellen wie $f(x)$, aber jede nur einfach zählend, und zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von $F(x)$ sind immer durch eine Unendlichkeitsstelle von $F(x)$ (Nullstelle von $f'(x)$, die nicht zugleich Nullstelle von $f(x)$ ist) getrennt; die Kurve $y=F(x)$ ist vom Grade l und besteht aus l jedesmal von $-\infty$ bis $+\infty$ ansteigenden Zügen; die äußersten derselben haben eine Asymptote parallel zur Geraden $y=\frac{x}{n}$, während die andern $l-1$ Asymptoten parallel zur y-Achse verlaufen.

Jede Gerade, die mit der x-Achse einen kleineren oder ebenso großen Winkel bildet als die zuerst genannte Asymptote, schneidet die Kurve l-ter Ordnung $y=F(x)$ offenbar in l reellen Punkten, worunter eventuell ein unendlich ferner; eine solche Gerade kann daher nicht Tangente an $y=F(x)$ sein; mit andern Worten: *der Winkel, den irgendeine Tangente an die Kurve $y=F(x)$ mit der x-Achse bildet, ist größer als* arctg $\frac{1}{n}$; d. h.:

$$\frac{d\frac{f(x)}{f'(x)}}{dx} = 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} > \frac{1}{n}, \text{ oder} \tag{27.}$$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} < \frac{n-1}{n}, \text{ oder} \tag{28.}$$

$$n f(x) f''(x) - (n-1)(f'(x))^2 \leqq 0. \tag{29.}$$

Das Gleichheitszeichen in letzterer Beziehung gilt nur, wenn $f'(x)$ und $f(x)\, f''(x)$ gleichzeitig Null sind, also, da $f'(x)$ keine mehrfachen

Wurzeln hat, die nicht auch Wurzeln von $f(x)$ wären, nur wenn $f(x)=f'(x)=0$, d. h. wenn x eine mehrfache Wurzel von $f(x)$ ist, und zwar ist für eine m-fache Wurzel die linke Seite Null von der Ordnung $2m-2$.

Der durch Ungleichung (29.) gelieferte Satz ist, wie schon *Laguerre**) bemerkte, nichts anderes als das bekannte Theorem, daß für eine homogene binäre Form $f(x,y)$ die *Hesse*sche Kovariante $H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ immer negativ ist, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(x,1)$ sämtlich reell sind (*Gerbaldi*, Rendic. del Circ. mat. di Palermo, 3 (1889), p. 20, *Schoute* ebenda p. 160). Nach dem *Euler*schen Satz über homogene Funktionen ist nämlich

$$(30.) \qquad y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=nf(x,y)-x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

und nach nochmaliger Anwendung des *Euler*schen Satzes:

$$(31.) \qquad y\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=n\left[nf(x,y)-x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]$$
$$-x\left[n\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right],$$

mithin

$$(32.) \quad y\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,y)-2(n-1)x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.$$

Endlich erhält man durch Differentiation von (30.) nach x:

$$(33.) \qquad y\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=(n-1)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.$$

Substituiert man die Ausdrücke (32.), (33.) in die *Hesse*sche Determinante, indem man noch überall $y=1$ und $f(x,1)=f(x)$ setzt, so erhält man:

$$H=(n-1)[nf(x)\,f''(x)-(n-1)\,(f'(x))^2].$$

Die vorhin gegebene Ableitung der Gleichung (29.) gibt also zugleich einen geometrisch sehr anschaulichen Beweis des *Gerbaldi*schen Satzes.

Da zur Ableitung von (29.) nur benutzt wurde, daß die Wurzeln von $f(x)=0$ reell sind und da dann das gleiche auch von den Wurzeln der Gleichungen $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ usw. gilt, so hat man zugleich die Formeln:

---

*) Oeuvres, Bd. 1 (Paris 1898), S. 104.

$$(34.)\qquad \frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2} \leqq \frac{n-2}{n-1},$$

$$(35.)\qquad \frac{f''(x)f''''(x)}{(f'''(x))^2} \leqq \frac{n-3}{n-2} \text{ usw.*)}$$

Ich betrachte nun die Kurve $y=(F(x))^m$ und behaupte, daß für dieselbe, sobald $m \geqq 2n$ ist, y' und y'' nur gleichzeitig mit y im Reellen Null werden und daß y'' stets mit y gleichbezeichnet ist; es ist nämlich $y'=m(F(x))^{m-1}\left(1-\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)$, und der Klammerfaktor hat wegen (29.) keine reellen Nullstellen. Den Beweis, daß y und y'' stets gleiches Vorzeichen haben, hole ich nach und ziehe vorher die Folgerung, *daß die Newtonsche Näherungsmethode auf die Funktion* $(F(x))^m=\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^m$ $(m \geqq 2n)$ *angewandt immer konvergiert, wie auch der erste Näherungswert* x_1 *reell angenommen sein möge. Man erhält danach*

$$(36.)\qquad x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)f'(x_i)}{m(f(x_i)f''(x_i)-(f'(x_i))^2)},$$

und die Konvergenz ist offenbar eine uneigentliche $(x_1=x_2=x_3=\cdots)$, *wenn* x_1 *eine Nullstelle von* $f(x)$ *oder von* $f'(x)$ *ist.*

In allen andern Fällen konvergiert das Verfahren im eigentlichen Sinne nach einer Wurzel der Gleichung $f(x)=0$. *Bezeichnet man nämlich der Größe nach geordnet die voneinander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung mit* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_l$ *und ebenso die davon verschiedenen Wurzeln der Gleichung* $f'(x)=0$ *mit* $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_{l-1}$, *so liegt jetzt* x_1 *in einem der folgenden* $l+1$ *Intervalle*:

$$(37.)\quad (-\infty, \xi_1), (\xi_1, \xi'_1), (\xi'_1, \xi_2), (\xi_2, \xi'_2), \ldots (\xi_{l-1}, \xi'_{l-1}), (\xi'_{l-1}, \xi_l), (\xi_l, +\infty),$$

und das Verfahren, das mit der ersten Näherung x_1 *beginnt, konvergiert nach demjenigen Punkte* ξ_i, *der einer der Endpunkte des Intervalls ist, in dem* x_1 *liegt.*

Die Richtigkeit dieses Satzes ist eine unmittelbare Folge des in der vorigen Nummer konstatierten und übrigens der geometrischen Anschauung evidenten Lehrsatzes, wonach die *Newton*sche Näherungsmethode mit der ersten Näherung x_1 stets nach einem Wurzelwerte $\bar{x}$ konvergiert, sobald an der Stelle x_i die Funktion mit ihrer zweiten Ableitung gleich

*) Durch Einsetzen des Wertes $x=0$ erhält man die bekannten *Newton*schen notwendigen Koeffizientenbedingungen für die Realität sämtlicher Wurzeln.

bezeichnet ist und sobald zwischen x_1 und $\bar{x}$ weder Nullstellen der Funktion noch ihrer beiden ersten Ableitungen liegen.

Es ist nur noch der Beweis dafür, daß y und y'' für $y=(F(x))^m=\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^m$ (und $m\geqq 2n$) stets gleich bezeichnet sind, nachzutragen, immer natürlich unter der Voraussetzung, daß die Gleichung $f(x)=0$ nur reelle Wurzeln hat. Man erhält

$$y''=m(F(x))^{m-2}[(m-1)(F'(x))^2+F(x)F''(x)]$$

$$=m(F(x))^{m-2}\left[(m-1)\left(1-\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)^2-\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right.$$

$$\left.-\frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2}\left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)^2+2\left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)^2\right],$$

also auf Grund von (29.), (34.):

$$yy''>m(F(x))^{2m-2}\left[(m-1)\left(1-\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)^2\right.$$

$$\left.-1-\left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)^2+2\left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)^2\right]$$

$$=m(F(x))^{2m-2}\left[\left(1-\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)\left(m-2-m\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)\right]$$

$$>m(F(x))^{2m-2}\left[m-2-m\frac{n-1}{n}\right] \text{ wegen (28.), also schließlich}$$

$yy''>0$, sobald $n(m-2)\geqq(n-1)m$ d. h. $m\geqq 2n$ ist.

Unter der gleichen Voraussetzung, daß alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung reell sind, hat schon *Laguerre* (Oeuvres Bd. 1, S. 104) eine andere Näherungsmethode angegeben, die konvergiert, sobald die erste Näherung x_1 zwischen ξ_1 und ξ_l liegt; die *Laguerre*sche Näherungsmethode bestimmt x_{i+1} aus x_i durch die Gleichung

$$x_{i+1}=x_i-\frac{nf(x_i)}{f'(x_i)\pm\sqrt{(n-1)^2(f'(x_i))^2-n(n-1)f(x_i)f''(x_i)}}$$

und kann aufgefaßt werden als Anwendung der *Newton*schen Methode auf die Funktion:

$$F(x)=e^{\frac{1}{n}\int\frac{f'(x)\pm\sqrt{(n-1)^2(f'(x))^2-n(n-1)f(x)f''(x)}}{f(x)}dx}.$$

Ihre Konvergenz ist besser als diejenige des auf Formel (36.) aufgebauten Verfahrens; das letztere erfordert aber keine Quadratwurzelausziehung und konvergiert auch für solche x, die außerhalb des Intervalls $(\xi_1\xi_l)$ liegen.

6. *Geometrisches.*

Errichtet man in allen Punkten $x=\xi+i\eta$ der komplexen Ebene immer nach derselben Seite hin Normalen von der Länge $|f(x)|$, so entsteht die *Fläche des absoluten Betrages* $\zeta=|f(\xi+i\eta)|$; ich setze der Einfachheit halber $f(x)$ als ganze algebraische Funktion voraus. Die Anwendung der *Newton*schen Näherungsmethode läßt sich dann geometrisch so deuten:

Die Senkrechte, welche man vom Punkte ξ_1, η_1, ζ_1 *der Fläche* $\zeta=|f(\xi+i\eta)|$ *auf die Schnittgerade der Tangentialebene in jenem Punkte mit der Ebene* $\zeta=0$ *fällt, trifft letztere in dem gleichen Punkte, den man analytisch durch die Newtonsche Näherungsmethode mit der ersten Näherung* $x_1=\xi_1+i\eta_1$ *erhält.*

Ich übergehe die ganz elementare Rechnung, die zum Beweise nötig ist. Ohne die $\xi\eta$-Ebene zu verlassen, kann man dieses Resultat teilweise auch so interpretieren:

Die Verbindungsstrecke der Punkte x_1 *und* $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ *steht senkrecht auf der durch den Punkt* x_1 *gehenden Kurve konstanten absoluten Betrages* $|f(\xi+i\eta)|=|f(x_1)|$.

Die Kurven $|f(x)|=C$ sind bekanntlich für hinlänglich große Werte von C geschlossen ohne Doppelpunkt und nähern sich um so mehr der Kreisform, je größer C ist.

Hat die Gleichung $f(x)=0$ die l verschiedenen Wurzeln $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \bar{x}_l$, so läßt sich die komplexe Ebene folgendermaßen in l Gebiete teilen, deren jedes eine jener l Wurzeln enthält.

Die orthogonalen Trajektorien $\varphi=C$ der Kurven $|f|=C$ verlaufen außerhalb der letzteren Kurven einzeln ohne Doppelpunkt, und zwar jede mit einer ihr eigentümlichen Asymptotenrichtung ins Unendliche; nach der andern Seite hin streben die Kurven $\varphi=C$ mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen den Punkten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_l$ zu, in denen sie endigen.*)

---

*) Beispiel: Für $f(x)=x^2-1$ sind die orthogonalen Trajektorien der Kurven $|f|=C$ bekanntlich Hyperbeln, sowie die ξ- und η-Achse; nach der Terminologie des Textes zählt jede Hyperbel für 4 Kurven $\varphi=C$, jeder Hyperbelast für zwei, die durch $\bar{x}_1=1$, bzw. $\bar{x}_2=-1$ getrennt werden; die η-Achse ist die einzige orthogonale Trajektorie der Kurven $|f|=C$, die weder durch $\bar{x}_1$ noch durch $\bar{x}_2$ geht.

Die Punkte derjenigen Kurven $\varphi = C$, die im Punkte $\bar{x}_i$ endigen, sowie die Häufungsstellen*) jener Punkte bilden nun ein Kontinuum; die inneren Punkte desselben bilden das dem Punkte $\bar{x}_i$ zugeordnete Gebiet K_i. Die Gebiete $K_1, K_2, \ldots K_l$ werden durch diejenigen Kurven $\varphi = C$ voneinander getrennt, die durch keinen der Punkte $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_l$ hindurchgehen (diese exzeptionellen Kurven $\varphi = C$ gehen sämtlich durch mindestens je einen Wurzelpunkt der Gleichung $f'(x) = 0$).

Man beweist nun leicht folgenden Satz:

Liegt das Gebiet G_i der komplexen Ebene ganz im Endlichen und ganz innerhalb K_i, dann existiert eine nur von G_i abhängige ganze Zahl m von folgender Eigenschaft: Sobald die erste Näherung x_1 beliebig innerhalb G_i gewählt wurde, konvergiert die Newtonsche Näherungsmethode auf $y = (f(x))^m$ angewandt nach der Nullstelle $\bar{x}_i$.

Das *Newton*sche Verfahren besteht nämlich darin, daß man aus einem Punkte x_i den nächsten x_{i+1} dadurch erhält, daß man im Punkte x_i auf der Tangente der durch diesen Punkt gehenden Kurve $\varphi = C$ um die Strecke $\frac{1}{m}\left|\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right|$ nach derjenigen Seite weitergeht, die ins Innere der durch den Punkt x_1 gehenden Kurve $|f(x)| = C$ führt. Da man $\frac{1}{m}$ beliebig klein wählen darf, so läßt sich das Verfahren auch auffassen als näherungsweise Integration der Differentialgleichung der Kurven $\varphi = C$, mit der Nebenbedingung, daß die gesuchte Integralkurve durch den Punkt x_1 hindurchgehen soll; ist m richtig d. h. genügend groß gewählt, so führt das Verfahren einerseits niemals aus dem Gebiete K_i hinaus, andererseits in eine solche Nachbarschaft des singulären Punktes $\bar{x}_i$ jener Differentialgleichung, daß auf Grund des Satzes von S. 7 die schließliche Konvergenz nach $\bar{x}_i$ gewährleistet wird.

Ich begnüge mich mit diesen geometrischen Hinweisen und verzichte auf eine ausführliche analytische Begründung, die in Anbetracht der geometrischen Anschaulichkeit des Behaupteten und des Fehlens prinzipieller Schwierigkeiten auf eine ziemlich zwecklose Übung in ε-Überlegungen hinauslaufen würde.

*) In dem Beispiel der vorigen Fußnote sind solche Häufungsstellen die Punkte der Strecke $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2)$ sowie die der Mittelsenkrechten dieser Strecke.

Das erhaltene Resultat läßt sich auch so formulieren:

Man verstehe unter α eine positive Zahl und unter $M_i(\alpha)$ die Menge derjenigen Punkte der komplexen Ebene, die als erste Näherungswerte x_1 benutzt bewirken, daß die verallgemeinerte Newtonsche Näherungsmethode

$$x_{k+1}=x_k-\alpha\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

nach $\bar{x}_i$ konvergiert. Dann unterscheiden sich innerhalb eines gegebenen endlichen Bereichs der komplexen Ebene die Mengen $M_i(\alpha)$ für genügend kleine Werte von α beliebig wenig von den oben definierten Mengen K_i.

Die Mengen $M_i(\alpha)$, von denen insbesondere die Mengen $M_i(1)$ interessieren würden, sind im allgemeinen sehr kompliziert. Im Falle der quadratischen Gleichung mit zwei verschiedenen Wurzeln $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ hat *E. Schröder**) auf sehr hübsche Weise bewiesen, daß die Mengen $M_1(1)$ und $M_2(1)$ mit K_1 und K_2 identisch sind, mit anderen Worten, daß die *Newton*sche Näherungsformel mit der ersten Näherung x_1 nach derjenigen der zwei Wurzeln $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ einer quadratischen Gleichung konvergiert, die x_1 in der komplexen Ebene am nächsten liegt; ist x_1 von $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ gleich weit entfernt, so divergiert das Verfahren.

*) Math. Ann. 3, S. 318.

*Lebesgue*sche Konstanten und divergente *Fourier*reihen.

Von Herrn *Leopold Fejér* in Klausenburg.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. — § 1. Die *Lebesgue*schen Konstanten der *Fourier*reihe. — § 2. Die Folgen von Funktionen $\psi(n+\frac{1}{2}, x)$, $\psi(2n, x)$, $\theta(n, x)$, $\theta(n, r, x)$. — § 3. Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter *Fourier*reihe. — § 4. Bemerkungen über die Natur der Divergenz dieser *Fourier*reihen. — § 5. Schlußbemerkungen.

Einleitung.

In zwei Notizen*), die kürzlich erschienen sind, habe ich Beispiele von überall stetigen Funktionen mitgeteilt, deren *Fourier*sche Reihe an einer Stelle divergiert. Bei der Konstruktion dieser Beispiele habe ich die sehr bemerkenswerten Betrachtungen von Herrn *Lebesgue* vor Augen gehabt, die er über diesen Gegenstand angestellt und in zwei kurzen Mitteilungen veröffentlicht hat**).

*) Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter *Fourier*reihe. Dieses Journal Bd. 137 (1909), S. 1. (Im folgenden kurz durch „Note I." zitiert.)

Eine stetige Funktion, deren *Fourier*sche Reihe divergiert. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXVIII (2° semestre, 1909), S. 402. (Im folgenden kurz durch „Note II." zitiert.)

**) Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de *Fourier*. Comptes Rendus de l'acad. des sciences, Paris, 1905, II. semestre, pag. 875—877.

Leçons sur les séries trigonométriques (Paris 1906), art. 45, 46, pag. 86—88.

In bezug auf die Verallgemeinerung auf gewisse allgemeinere Orthogonalreihen verweise ich auf die inhaltsreiche Dissertation von *Alfred Haar*:

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Göttingen, 1909.

In dieser Arbeit gebe ich einerseits eine neue Darstellung der *Lebesgue*schen Resultate, zu welchen ich einige neue hinzufüge. Andererseits gebe ich eine breitere Darstellung und Analyse meiner Noten I., II., die viele neue und, wie ich glaube, beachtenswerte Ausführungen enthält.

§ 1. Die *Lebesgue*schen Konstanten der *Fourier*reihe.

1. Es sei $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der *Fourier*schen Reihe einer im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ endlichen und (im *Riemann*schen Sinne) integrablen Funktion $f(x)$. Es sei also

$$s_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

wo

$$(1.) \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt, \\ a_\varkappa = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos \varkappa t\, dt, \quad b_\varkappa = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin \varkappa t\, dt. \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

Es sei weiter x eine bestimmte Stelle des Intervalles $0 \leqq x \leqq 2\pi$, und n ein bestimmter Wert des Index.

Ich betrachte nun, nach *Lebesgue*, die Menge sämtlicher Funktionen $f(x)$, die für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ endlich und integrabel sind und deren absoluter Betrag für jede Stelle dieses Intervalles kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Für eine jede Funktion $f(x)$ dieser Menge hat an der betrachteten Stelle x der absolute Betrag der n-ten *Fourier*schen Partialsumme

$$|s_n(x)|$$

einen bestimmten, nicht negativen Wert. Die Gesamtheit dieser nicht negativen Werte von $|s_n(x)|$ hat eine endliche positive *Weierstraß*sche obere Grenze, die ich mit $\varrho_n(x)$ bezeichne. Die obere Grenze $\varrho_n(x)$ ist in der Tat endlich. Da nämlich

$$(2.) \qquad s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}}\, dt$$

ist, folgt

$$(3.) \qquad |s_n(x)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right| dt.$$

Rechts steht eine ganz bestimmte positive Zahl, daher ist $\varrho_n(x)$ gewiß endlich.

Ich behaupte nun, nach *Lebesgue*, daß in der Ungleichung (3.) für eine geeignete Funktion $\varphi(x)$ der Menge das Gleichheitszeichen gültig ist, so daß also

$$(4.) \qquad \varrho_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt.$$

In der Tat gehört die Funktion

$$\varphi(t)=\operatorname{sign}\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} \qquad (0\leqq t\leqq 2\pi),$$

(wo nach einer *Kronecker*schen Bezeichnung

$$\operatorname{sign} a=\begin{cases}+1, & \text{wenn } a>0\\ 0, & \text{wenn } a=0\\ -1, & \text{wenn } a<0\end{cases}$$

ist) zur Menge der Funktionen $|f(x)|\leqq 1$.

Da aber für $\varphi(x)$

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt$$

wird, ist an der Stelle x für die Funktion $\varphi(x)$ in der Tat

$$|s_n(x)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt,$$

womit (4.) bewiesen ist.

Die *obere Grenze* $\varrho_n(x)$ ist also zugleich das *Maximum* von $|s_n(x)|$ in bezug auf die betrachtete Funktionsmenge.

Zu jeder Stelle x des Intervalles gehört ein solcher maximaler Wert $\varrho_n(x)$. *Diese Werte* $\varrho_n(x)$ *sind aber alle gleich.* In der Tat nimmt infolge der Periodizität das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt$$

für jeden Wert von x denselben Wert an. Ich kann also $\varrho_n(x)$ kurz mit ϱ_n bezeichnen und erhalte, wenn ich in (4.) $x=0$ setze,

$$\varrho_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt.$$

Zu jedem Wert des Index n gehört eine solche positive Konstante ϱ_n. *Die Folge der Konstanten*

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots\varrho_n,\ \ldots,$$

wo

$$\varrho_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt, \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{5.}$$

ist eine ganz bestimmte, zur Fourierschen Reihe gehörige Folge von positiven Konstanten. Hier bedeutet ϱ_n den für sämtliche Stellen des Intervalles $0\leqq x\leqq 2\pi$ gemeinsamen maximalen Wert von $|s_n(x)|$, wenn $f(x)$ die Gesamtheit aller im Intervalle $0\leqq x\leqq 2\pi$ integrablen Funktionen durchläuft, die dem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich 1 sind. Die Wichtigkeit dieser Konstanten ϱ_n hat zuerst Lebesgue hervorgehoben; ich nenne sie deshalb die „Lebesgueschen Konstanten der Fourierreihe“ *).

---

*) Ist für $0\leqq x\leqq 2\pi$

$$|f(x)|\leqq M, \tag{6.}$$

so ist für irgendeine Stelle x dieses Intervalles und für jeden Wert des Index n

$$|s_n(x)|\leqq M\varrho_n\ ; \tag{7.}$$

sind n und x fixiert, so gilt in (7.) für eine geeignete Funktion der Menge $|f(x)|\leqq M$ die Gleichheit.

Man kann die Konstante ϱ_n übrigens auch so charakterisieren, daß sie den

Die geometrische Bedeutung der *Lebesgue*schen Konstante ϱ_n ist leicht anzugeben.

Betrachten wir die *Dirichlet*sche Kurve

$$y = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Sie besteht aus wellenförmigen Zügen, die teils oberhalb, teils unterhalb der Abszissenachse liegen. Die *algebraische* Summe der durch die Kurve definierten positiven und negativen Wellenflächeninhalte ist gleich

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx,$$

also gleich 1, für jeden Wert des Index n. Bilde ich aber die *Summe* dieser *absolut* genommenen Flächeninhalte, so erhalte ich

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right| dx,$$

d. h. den Wert ϱ_n der n-ten *Lebesgue*schen Konstante.

2. Herr *Lebesgue* hat über die Konstanten ϱ_n folgenden Satz bewiesen (Leçons, Art. 45)*):

Die Konstanten ϱ_n wachsen mit wachsendem n ins Unendliche; d. h.

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n = +\infty.$$

Ich möchte im folgenden etwas Genaueres feststellen, nämlich den asymptotischen Ausdruck für diese wichtigen Konstanten aufstellen.

Ich schicke einen Hilfssatz voraus. Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ endliche und integrable Funktion. Dann ist bekanntlich nach

---

maximalen *positiven Wert* von $s_n(x)$ angibt, den $s_n(x)$ an irgendeiner Stelle x für die Gesamtheit der Funktionen $|f(x)| \leqq 1$ annimmt.

Weiter genügt es, sich auf die Gesamtheit aller *stetigen* Funktionen $f(x)$ zu beschränken, für welche $|f(x)| \leqq 1$. Nur erscheint dann ϱ_n nicht als Maximum, sondern als *Weierstraß*sche obere Grenze.

*) Vgl. auch die soeben erschienene Arbeit von *Lebesgue*: Sur les intégrales singulières. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 3. Sér. T. I (1910), art. [33], [48].

Riemann (Fundamentallemma der Konvergenztheorie der *Fourier*schen Reihe):

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (nx)\, dx = 0.$$

Ich will nun zeigen, daß für eine im Intervalle (a,b) *beliebige endliche und integrable Funktion* $f(x)$

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) |\sin nx|\, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x)\, dx, \tag{8.}$$

und ebenso

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) |\cos nx|\, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{9.}$$

Der sehr einfache Beweis dieser Sätze gestaltet sich folgendermaßen:

Es seien k und l diejenigen (positiven oder negativen) ganzen Zahlen, für welche

$$(k-1)\frac{\pi}{n} < a \leqq k\frac{\pi}{n} < (k+1)\frac{\pi}{n} < \cdots < l\frac{\pi}{n} \leqq b < (l+1)\frac{\pi}{n}.$$

Dann ist

$$\int_a^b f(x) |\sin nx|\, dx = \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx|\, dx + \cdots + \int_{(l-1)\frac{\pi}{n}}^{l\frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx|\, dx + \varepsilon_n,$$

wo*)

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Mit Rücksicht auf den ersten Mittelwertsatz für bestimmte Integrale wird

$$\int_a^b f(x) |\sin nx|\, dx = \frac{2}{n} f_1 + \frac{2}{n} f_2 + \cdots + \frac{2}{n} f_{l-k} + \varepsilon_n.$$

Hier ist

$$m_1 \leqq f_1 \leqq M_1,$$

wo m_1 die untere, M_1 die obere Grenze von $f(x)$ in bezug auf das Intervall $\left(k\frac{\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}\right)$ bedeutet. Weiter ist

---

*) Im Laufe dieser Arbeit bedeutet ε_n immer eine Größe, für welche $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

$$m_2 \leqq f_2 \leqq M_2,$$

wo m_2, M_2 die gleiche Bedeutung in bezug auf das nächste Intervall haben — usw.

Da also

$$\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} f_1 + \cdots + \frac{\pi}{n} f_{l-k}\right) + \varepsilon_n,$$

so folgt

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ähnlich kann man Gleichung (9.) beweisen. —

Bevor ich zur Bestimmung des asymptotischen Ausdruckes für ϱ_n übergehe, möchte ich zeigen, wie man mit Hilfe des Satzes (8.) beweisen kann, daß $\lim_{n=\infty} \varrho_n = +\infty$ ist.

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Dann ist

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt > \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt$$

$$> \frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} + \varepsilon_n$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\log\varepsilon + \frac{4}{\pi^2}\log\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n.$$

Wenn also n gehörig groß ist, so ist

$$\varrho_n > \frac{4}{\pi^2}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Da ε beliebig klein angenommen werden kann, so ist

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n = +\infty.$$

Der genaue asymptotische Ausdruck für ϱ_n läßt sich folgendermaßen bestimmen:

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)|\sin(2n+1)t|\,dt,$$

(10.) $$\varrho_n = \lambda_n + \mu_n.$$

Hier ist, mit Rücksicht auf Satz (8.),

(11.) $$\lim_{n=\infty} \mu_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt.$$

Weiter ist

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\frac{\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt,$$

(12.) $$\lambda_n = \nu_n + \varepsilon_n.$$

Nun ist aber

$$\nu_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt,$$

(13.) $$\nu_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+\pi} + \cdots + \frac{1}{t+n\pi}\right)\sin t\,dt.$$

Weiter ist bekanntlich*)

(14.) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \log n + \eta_n(x),$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \eta_n(x) = 0,$$

*) Aus der für jedes x gültigen Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\,e^{Cx}\,\Pi\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$$

läßt sich (14.) leicht ableiten. Hier bedeutet C die *Euler-Mascheroni*sche Konstante.

und zwar gleichmäßig in einem Intervalle, dessen Grenzen nicht negativ sind. Ziehen wir Gleichung (14.) in Betracht, so folgt

$$\nu_n = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} \frac{\log n}{\pi} \sin t\, dt - \int_0^{n} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)} \sin t\, dt\right\} + \varepsilon_n .$$

Also ist

$$(15.) \qquad \nu_n = \frac{4}{\pi^2} \log n - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{n} \frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)} \sin t\, dt + \varepsilon_n .$$

Endlich liefern (10.), (11.), (12.), (15.)

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n ,$$

wo

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) dt - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)} \sin t\, dt .$$

Ich bin also zu dem folgenden Satze gelangt:

Die Lebesguesche Konstante ϱ_n hat die Form:

$$(16.) \qquad \varrho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n .$$

Hier bedeutet c_0 die Konstante)*

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) dt + 2 \int_0^{1} \log \Gamma'(t) \cos \pi t\, dt ,$$

---

*) Zur Berechnung der Konstante

$$\int_0^{1} \log \Gamma(t) \cos \pi t\, dt$$

und der später in der Formel (24.) auftretenden Konstante

$$\int_0^{1} \log \Gamma(t) \sin 2\pi t\, dt$$

kann man die *Kummer*sche *Fourier*reihe für $\log \Gamma(t)$ benutzen.

und es ist

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Aus der Formel (16.) folgt zunächst wieder, daß die Konstanten ϱ_n mit wachsendem n jede endliche Grenze überschreiten. Sie wachsen aber sehr langsam ins Unendliche.

Man kann übrigens zeigen, daß

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}, \tag{17.}$$

wo c_1 eine von n unabhängige Konstante bedeutet und $\alpha(n)$ dem absoluten Betrage nach für jedes n unterhalb einer endlichen positiven Grenze bleibt.

Der Beweis der Formel (17.) ist schon etwas umständlicher. Indessen läßt er sich doch unschwer führen, wenn man erst, analog zu der bekannten asymptotischen Entwickelung von

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

(für große Werte von n), die asymptotische Entwickelung von

$$\int_a^b f(x) \left|\sin nx\right| dx$$

bestimmt. Die letztere kann man mit Hilfe der *Euler-Maclaurin*schen Summenformel herleiten.

Aus (17.) folgt:

$$\varrho_{n+1} - \varrho_n = \frac{4}{\pi^2} (\log(n+1) - \log n) + \frac{\alpha'(n)}{n^2} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n} (1 + \varepsilon_n).$$

Daraus folgt dann, daß $\varrho_{n+1} - \varrho_n$ positiv ist, wenn nur n genügend groß ist:

Von einem gewissen Gliede an wachsen die Zahlen

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \ldots$$

beständig *).

---

*) Wahrscheinlich wachsen sie vom Beginne an. Wenn dies der Fall wäre, so wäre es wünschenswert, einen elementaren Beweis dafür zu geben, der sich vielleicht direkt auf die Formel (5.), nicht aber auf den asymptotischen Ausdruck (17.) dieser Zahl stützt.

3. Ich schließe diesen Paragraphen damit, daß ich die Lösung der *Lebesgue*schen Fragestellung für die arithmetischen Mittel der Partialsummen:

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}$$

bespreche.

Es ist

$$(18.) \qquad S_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt.$$

Betrachte ich wieder die Gesamtheit aller integrablen Funktionen, für welche im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$

$$|f(x)| \leqq 1,$$

so ist, für irgendeine dieser Funktionen, an der Stelle x

$$|S_n(x)| \leqq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt = 1.$$

Also ist

$$|S_n(x)| \leqq 1$$

für jeden ganzzahligen Wert von n und für jeden Wert von x*).

Der Wert 1 wird durch die Funktion

$$f(x) = 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

erreicht.

Für die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ ist also einfach

$$1, 1, 1, \ldots 1, \ldots$$

---

*) Diesen Satz habe ich zuerst in meiner Arbeit: „Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen“ (Math. Annalen, Bd. 58, 1904, S. 60) bewiesen.

diejenige Folge von Konstanten, welche der Folge der Lebesgueschen Konstanten für $s_n(x)$:

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots \varrho_n,\ \ldots$$

entspricht.

§ 2. Die Folgen von Funktionen $\psi(n+\frac{1}{2},x)$, $\psi(2n,x)$, $\theta(n,x)$, $\theta(n,r,x)$.

4. Ich habe in § 1 nach *Lebesgue* die Folge der zur Menge $|f(x)|\leqq 1$ gehörigen Funktionen

$$(20.)\qquad \varphi_n(x)=\operatorname{sign}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)\qquad {\scriptstyle (n=0,1,2,3,\ldots)}$$

betrachtet und bewiesen, daß die n-te *Fourier*sche Partialsumme von $\varphi_n(x)$ an der Stelle $x=0$ einen Wert $s_n(0)=\varrho_n$ besitzt (n-te *Lebesgue*sche Konstante), der mit n ins Unendliche wächst.

Da

$$\operatorname{sign}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\operatorname{sign}\ \sin(2n+1)\frac{x}{2}\quad(0<x<2\pi),$$

so ist

$$(21.)\qquad \varphi_n(x)=\operatorname{sign}\ \sin(2n+1)\frac{x}{2}\quad(0<x<2\pi).\qquad {\scriptstyle (n=0,1,2,3,\ldots)}$$

Diese Funktionen $\varphi_n(x)$ der Menge $|f(x)|\leqq 1$ sind alle (außer $\varphi_0(x)$) *unstetig*. Die Anzahl der Unstetigkeitsstellen wächst mit n ins Unendliche.

Es ist aber wünschenswert, aus der Funktionsmenge $|f(x)|\leqq 1$ eine Folge von *stetigen* Funktionen

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \ldots\psi_n(x),\ \ldots$$

herauszugreifen, für welche die n-te Funktion $\psi_n(x)$ an der Stelle $x=0$ einen mit n ins Unendliche wachsenden Wert $s_n(0)$ besitzt.

Es ist nun im Prinzipe leicht, aus den unstetigen Funktionen $\varphi_n(x)$ eine solche stetige Folge $\psi_n(x)$ abzuleiten. Die Möglichkeit einer solchen Bestimmung folgt, wie *Lebesgue* bemerkt, aus bekannten Sätzen

über Approximation gewisser unstetiger Funktionen*). *Aber eine besonders einfach definierte, und eine weitere wichtige besondere Eigenschaft besitzende Folge* $\psi_n(x)$ *erhalte ich dadurch, daß ich auf der rechten Seite der Gleichung* (21.) *das Signumzeichen fortlasse; ich definiere also*

$$(22.) \qquad \psi_n(x) = \sin(2n+1)\frac{x}{2} \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi). \qquad (n=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Zunächst ist klar, daß die Funktionen

$$\sin\frac{x}{2},\ \sin 3\frac{x}{2}, \ldots \sin(2n+1)\frac{x}{2}, \ldots$$

alle zur Menge $|f(x)| \leqq 1$ gehören.

Weiter ist, mit Rücksicht auf Gleichung (2.), für $\psi_n(x)$

$$s_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(\sin(2n+1)\frac{t}{2}\right)^2}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t}\,dt.$$

Ich behaupte nun, daß die Konstanten

$$(23.) \qquad \sigma_n = |s_n(0)| = s_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t}\,dt$$

mit wachsendem n gegen Unendlich konvergieren.

In der Tat ist, wenn $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t}\,dt > \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{t}\,dt$$

$$> \frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos 2(2n+1)t}{t}\,dt$$

---

*) Ich bemerke, daß z. B. die arithmetischen Mittel der Partialsummen der *Fourier*schen Reihe von $\varphi_n(x)$ zu diesem Zwecke besonders geeignet sind. (Vergl. z. B. § 1, Art. 3 dieser Arbeit.)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2(2n+1)t}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\log\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n.$$

Also ist, wenn nur n gehörig groß ist,

$$\sigma_n > \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Da ε beliebig klein angenommen werden kann, *ist also*

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = +\infty.$$

Die Methode, mit welcher ich den asymptotischen Ausdruck der Konstante

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt \tag{5.}$$

bestimmt habe, ist auch zur Bestimmung des asymptotischen Ausdruckes der Konstanten

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t}\,dt \tag{23.}$$

geeignet. In der Tat ist

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin^2(2n+1)t\,dt$$

$$= \alpha_n + \beta_n.$$

Da aber

$$\sin^2(2n+1)t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(2n+1)t,$$

so ist

$$\lim_{n=\infty}\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt.$$

Weiter ist

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+\pi} + \cdots + \frac{1}{t+n\pi}\right)\sin^2 t\,dt + \varepsilon_n.$$

Wenn ich also wieder die Gleichung (14.) berücksichtige, so erhalte ich

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\log n}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)}\sin^2 t\,dt\right\} + \varepsilon_n.$$

Dies liefert endlich für σ_n den Ausdruck:

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\log n + \gamma_0 + \varepsilon_n, \tag{24.}$$

wo

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt + 2\int_0^{1}\log \Gamma(t)\,\sin 2\pi t\,dt,$$

und

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n = 0.$$

Damit ist zunächst wieder bewiesen, daß $s_n(0)$ für das n-te Glied der Folge

$$\sin\frac{x}{2},\ \sin 3\frac{x}{2},\ \ldots\ \sin(2n+1)\frac{x}{2},\ \ldots$$

ein solcher positiver Wert σ_n ist, der mit wachsendem n gegen Unendlich konvergiert. Aber auch die Art des Unendlichwerdens von σ_n ist durch den asymptotischen Ausdruck (24.) näher präzisiert.

5. Im vorhergehenden habe ich, um zu beweisen, daß der Wert $s_n(0)$ für $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ mit n ins Unendliche wächst, die Methode des § 1 benutzt. Indessen läßt sich die n-te *Fourier*sche Partialsumme der Funktion $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ an der Stelle $x=0$ auch direkt leicht untersuchen. Überhaupt kann man eine beliebige *Fourier*sche Partialsumme (d. h. die unendliche *Fourier*sche Reihe) der Funktion $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ explizite darstellen und aus dieser Darstellung alle merkwürdigen Eigenschaften dieser Partialsummen für die Stelle $x=0$ mit Leichtigkeit ablesen.

Die explizite *Fourier*sche Reihe von $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ (diese ist eine Kosinusreihe) lautet nämlich:

$$\sin(2n+1)\frac{x}{2} = a_0 + a_1\cos x + \cdots + a_\varkappa\cos\varkappa x + \cdots \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi), \tag{25.}$$

wo

$$(26.)\qquad \begin{cases} a_x = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}, & (x=1,2,3,\ldots) \\ a_0 = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (26.) sehen wir, daß die Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n$$

alle positiv sind, während die Koeffizienten

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots$$

alle negativ sind. Nun ist aber die Gleichung (25.) auch für $x=0$ gültig. Daher ist

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots = 0.$$

Daraus folgt, daß sämtliche Partialsummen der Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_x + \cdots$$

positiv sind. Weiter folgt daraus, daß diese Partialsummen im Anfange beständig wachsen, in der Partialsumme s_n ihr Maximum erreichen und vom Indexwert n an fortwährend abnehmend gegen Null konvergieren. Aus der Formel (26.) folgt endlich sehr einfach, daß die maximale Partialsumme, d. h. der Wert von $s_n(0)$ für $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$, größer ist als

$$\frac{1}{2\pi}\log(2n+1)$$

und also mit wachsendem n ins Unendliche wächst. (Vgl. Note I.)

Ich habe also mit Hilfe der Formeln (25.), (26.) ganz elementar bewiesen:

Die Funktionen

$$(22.)\qquad \sin\frac{x}{2},\ \sin 3\frac{x}{2},\ \ldots\ \sin(2n+1)\frac{x}{2},\ \ldots$$

haben die folgenden Eigenschaften:

1. *Sie gehören alle zum Bereiche der stetigen Funktionen $f(x)$, für welche $|f(x)| \leqq 1$.*

2. *Sämtliche Fouriersche Partialsummen irgendeiner dieser Funktionen sind an der Stelle* $x=0$ *positiv.*

3. *Die n-te (d. h. die maximale) Partialsumme von* $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ *für* $x=0$ *hat einen Wert, der größer ist als* $\frac{1}{2\pi}\log(2n+1)$ *und der also mit wachsendem n gegen Unendlich konvergiert.*

Ich lenke hier die Aufmerksamkeit besonders auf die Eigenschaft 2. der Funktionenfolge. Die Durchsichtigkeit meiner Beispiele in § 3 beruht zum Teil auf dieser Eigenschaft.

6. Die Folge $\psi_n(x)$ entsteht dadurch, daß ich in

$$\sin \mu x \tag{27.}$$

der Reihe nach die Zahlen

$$\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ \ldots n+\frac{1}{2},\ \ldots$$

setze. Setze ich nun z. B. in (27.) für μ der Reihe nach die Zahlen

$$2,\ 4,\ \ldots 2n,\ \ldots,$$

so erhalte ich die Folge

$$\sin 2x,\ \sin 4x,\ \ldots \sin 2nx,\ \ldots \quad (0\leqq x\leqq\pi), \tag{28.}$$

die wieder alle wesentlichen Eigenschaften der Folge $\psi_n(x)$ besitzt.

Es sei allgemein

$$\begin{aligned} &\psi(\mu,x)=\sin\mu x \text{ für } 0\leqq x\leqq\pi,\\ &\psi(\mu,x)=\psi(\mu,2\pi-x) \text{ für } \pi<x\leqq 2\pi. \end{aligned} \tag{29.}$$

Hier bedeutet μ eine beliebige positive reelle Zahl.

Die *Fourier*sche Reihe von $\psi(\mu,x)$ (diese ist eine reine Kosinusreihe) lautet:

$$\psi(\mu,x)=a_0+a_1\cos x+\cdots+a_\varkappa\cos\varkappa x+\cdots \quad (0\leqq x\leqq\pi),$$

wo

$$\begin{cases} a_\varkappa=\dfrac{1+(-1)^{\varkappa+1}\cos\mu\pi}{\pi}\cdot\dfrac{2\mu}{\mu^2-\varkappa^2}, & (\varkappa=1,2,\ldots)\\ a_0=\dfrac{1-\cos\mu\pi}{\pi}\dfrac{1}{\mu}. \end{cases} \tag{30.}$$

Bezeichnet $[\mu]$ die größte ganze Zahl, die $\leqq\mu$ ist, so sind die Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ \ldots a_{[\mu]}$$

alle nicht negativ, wärend die Koeffizienten

$$a_{[\mu]+1},\ a_{[\mu]+2},\ \ldots$$

alle nicht positiv sind. Da wieder

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = 0$$

ist, sind daher sämtliche $s_\varkappa(0)$ der Funktion $\psi(\mu, x)$ nicht negativ. Die $s_\varkappa(0)$ sind wieder leicht zu studieren. Z. B. für $\psi(2n, x)$ sind $s_{2n-1}(0) = s_{2n}(0)$ die maximalen Partialsummen, und ihr Wert konvergiert für $\lim n = \infty$ gegen $+\infty$. Daher ist in der Tat

$$\psi(2,x),\ \psi(4,x),\ \ldots \psi(2n,x),\ \ldots \tag{31.}$$

eine Folge des Bereiches $|f(x)| \leqq 1$, deren Funktionen die wesentlichen Eigenschaften der Folge $\psi_n(x) = \psi(n + \frac{1}{2}, x)$ besitzen.

7. In meiner Note II. habe ich eine weitere Folge von stetigen Funktionen mit den in Betracht kommenden Eigenschaften aufgestellt, die wohl für die Zwecke des nächsten Paragraphen am meisten geeignet ist.

Es sei für $0 \leqq x \leqq 2\pi$

$$\theta(1,x) = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{1},$$

$$\theta(2,x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{1} - \frac{\cos 3x}{1} - \frac{\cos 4x}{2},$$

$$\theta(3,x) = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{1} - \frac{\cos 4x}{1} - \frac{\cos 5x}{2} - \frac{\cos 6x}{3},$$

. . . . . .

$$\theta(n,x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos (n+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos 2nx}{n},$$

. . . . . .

Für das Kosinuspolynom $\theta(n,x)$ sind sämtliche Werte $s_\varkappa(0)$ nicht negativ. Die maximale Partialsumme hat den Wert

$$s_n(0) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1,$$

ist also größer als $\log n$ und wächst daher für $\lim n = \infty$ ins Unendliche. Weiter läßt sich zeigen, daß für jeden reellen Wert von x und für jeden

positiven ganzzahligen Wert von n

$$|\theta(n,x)|<34.$$

Daher gehört die Folge

$$(32.)\qquad \frac{\theta(n,x)}{34} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

gewiß zum Bereiche $|f(x)|\leqq 1$ und besitzt alle wesentlichen Eigenschaften der Folgen

$$(22.)\qquad \psi(n+\frac{1}{2},x), \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$(31.)\qquad \psi(2n,x). \qquad (n=1,2,\ldots)$$

8. In meiner Note II. habe ich behauptet, daß

$$|\theta(n,x)|=\left|\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos nx}{1}-\frac{\cos(n+1)x}{1}-\cdots-\frac{\cos 2nx}{n}\right|<34$$

für jeden positiven ganzzahligen Wert von n und für jeden reellen Wert von x und habe den Beweis dafür angedeutet.

Jetzt will ich obige Ungleichung verallgemeinern und verschärfen. Es gilt folgender merkwürdige Satz:

Es sei

$$(33.)\quad \theta(n,r,x)=\frac{\cos(r+1)x}{n}+\frac{\cos(r+2)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(r+n)x}{1}$$
$$-\frac{\cos(r+n+1)x}{1}-\cdots-\frac{\cos(r+2n)x}{n}.$$

Dann ist

$$|\theta(n,r,x)|<25,6$$

für jeden positiven ganzzahligen Wert von n, für jeden nicht negativen ganzzahligen Wert) von r und für jeden reellen Wert von x.*

Beweis: Es ist

$$\theta(n,r,x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(r+n+\nu)x}{\nu},$$

also ist

$$(34.)\quad \theta(n,r,x)=2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}.$$

---

*) Ja sogar für jeden reellen Wert von r.

Der absolute Betrag des ersten Faktors auf der rechten Seite dieser Gleichung ist $\leqq 2$. Es genügt also zu zeigen, daß

$$(35.) \qquad |\lambda_n(t)| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)t}{\nu} \right| < 12,8,$$

für jeden positiven ganzzahligen Wert von n und für jeden reellen Wert des Intervalles

$$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Ich gebe nun den Beweis der Ungleichung (35.).

Es sei

$$\mu_n(t) = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \cdots + \frac{\sin nt}{n},$$

und es sei M eine positive Konstante, so daß

$$(36.) \qquad |\mu_n(t)| = \left| \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \cdots + \frac{\sin nt}{n} \right| < M$$

ist für jeden positiven ganzzahligen Wert von n und für jeden reellen Wert von t. Dann ist, behaupte ich,

$$|\lambda_n(t)| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)t}{\nu} \right| < 2 + 3M.$$

In der Tat ist

$$(37.) \quad \mu_{2n-1}(t) - \frac{1}{2}\mu_{n-1}(2t) = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

und

$$(38.) \quad \frac{\lambda_n(t)}{2} = \frac{\sin t}{2} + \frac{\sin 3t}{4} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n}.$$

Wenn ich von der Gleichung (38.) die Gleichung (37.) abziehe, so erhalte ich

$$\frac{\lambda_n(t)}{2} = \mu_{2n-1}(t) - \frac{1}{2}\mu_{n-1}(2t)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}-1\right)\sin t + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\sin 3t + \cdots + \left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-1}\right)\sin(2n-1)t.$$

Daher ist

$$\frac{|\lambda_n(t)|}{2} < M + \frac{M}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < 3\frac{M}{2} + 1.$$

Also ist

$$|\lambda_n(t)|<2+3M,$$

was zunächst zu beweisen war.

Nun behaupte ich, daß man in der Ungleichung (36.)

$$M=3,6$$

setzen kann.

In der Tat, es ist bekanntlich

$$\mu_n(t)=-\frac{t}{2}+\int_0^{\frac{t}{2}}\frac{\sin(2n+1)\xi\,d\xi}{\sin\xi}.$$

Setze ich also $\frac{t}{2}=z$, so erhalte ich

$$\mu_n(2z)=-z+\int_0^z\frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}d\xi \qquad \left(0\leqq z\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

Daher ist

$$|\mu_n(2z)|\leqq\frac{\pi}{2}+\left|\int_0^z\frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}d\xi\right|.$$

Nun ist aber die Funktion von z

$$\int_0^z\frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}d\xi \quad \text{für} \quad 0<z\leqq\frac{\pi}{2}$$

stets positiv und erreicht ihr Maximum für $z=\frac{\pi}{2n+1}$. Also ist

$$|\mu_n(2z)|\leqq\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)\xi\,d\xi}{\sin\xi}.$$

Da aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{\nu}}\frac{\sin\nu\xi}{\sin\xi}d\xi=\int_0^{\pi}\frac{\sin\alpha}{\nu\sin\frac{\alpha}{\nu}}d\alpha$$

fortwährend abnimmt, wenn ν von $\nu=2$ an fortwährend wächst, so ist für jeden positiven ganzzahligen Wert von n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi < \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = \int_0^{\pi} \cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = 2.$$

Also ist

$$|u_n(2z)| < \frac{\pi}{2} + 2 < \frac{3,2}{2} + 2 = 3,6 \quad \text{für} \quad 0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Schließlich erhalte ich

$$|\lambda_n(t)| < 2 + 3 \cdot 3,6 = 12,8$$

für $0 \leqq t \leqq \pi$ und daher für jeden reellen Wert von t.

Daraus folgt aber:

$$|\theta(n,r,x)| < 25,6$$

für

$$r = 0,1,2,3,\ldots,$$
$$n = 1,2,3,\ldots,$$
$$-\infty < x < +\infty.$$

Die Folge

$$\theta(1,r,x),\ \theta(2,r,x),\ \ldots\ \theta(n,r,x),\ \ldots$$

ist, wenn ich das allgemeine Glied etwa durch 26 dividiere, auch eine Folge vom Charakter der Folgen $\psi\left(n+\frac{1}{2},x\right)$, $\psi(2n,x)$, $\theta(n,x)$. Hier bedeutet r eine nichtnegative ganze Zahl, deren Wert in jedem einzelnen Gliede der Folge ganz willkürlich gewählt werden kann. Diese Willkürlichkeit in der Wahl des Wertes des nichtnegativen Parameters r werden wir im nächsten Paragraphen ausnutzen.

§ 3. Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter *Fourier*reihe.

9. *Lebesgue* hatte die bemerkenswerte Idee, die Folge der Signumfunktionen $\varphi_n(x)$, die unter (21.) definiert sind, zur Herstellung einer überall stetigen Funktion zu benutzen, deren *Fourier*sche Reihe an der Stelle $x=0$ divergiert. Er bemerkt, daß die unstetigen Funktionen $\varphi_n(x)$ durch geeignete stetige Funktionen approximierbar sind, und beweist nun mit Hilfe dieser neuen, stetigen Folge von Funktionen die Existenz einer überall stetigen Funktion, deren *Fourier*sche Reihe für $x=0$ divergiert.

Diese überall stetige Funktion definiert er in der Form einer unendlichen Reihe.

Mit Hilfe meiner Folgen $\psi\left(n+\frac{1}{2}, x\right)$ (unter (22.)), $\psi(2n, x)$ (unter (31.)), $\theta(n, x)$ (unter (32.)) usw. war ich nun in der Lage, *explizite* Beispiele *Lebesgue*scher Konstruktion zu geben. Da sämtliche Partialsummen der *Fourier*schen Reihe irgendeines Gliedes dieser Folgen an der Stelle $x=0$ nicht negativ sind, haben meine speziellen expliziten Reihen noch den Vorzug, daß die Divergenz ihrer *Fourier*schen Reihe an der Stelle $x=0$ elementar und ganz kurz beweisbar ist. Weiter kann ich, dank des expliziten und einfachen Charakters dieser Reihen, nicht nur feststellen, daß ihre *Fourier*schen Reihen an der Stelle $x=0$ divergieren, sondern ich kann auch die Natur dieser divergenten Reihen weiter verfolgen.

Aus den früher auseinandergesetzten Eigenschaften der Folge

$$(22.) \qquad \sin\frac{x}{2},\ \sin 3\frac{x}{2},\ \ldots\ \sin(2n+1)\frac{x}{2},\ \ldots$$

folgt ohne weiteres:

Die unendliche Reihe

$$(22'.) \qquad f_1(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2^{\nu^3}+1)\frac{x}{2}}{\nu^2}$$

stellt im Intervalle $0\leqq x\leqq 2\pi$ *eine solche überall stetige Funktion dar, deren Fouriersche Reihe an der Stelle* $x=0$ *divergiert.*

Dieses Beispiel habe ich zuerst in meiner Note I. gegeben.

Aus den früher auseinandergesetzten Eigenschaften der Folge

$$(31.) \qquad \psi(2,x),\ \psi(4,x),\ \ldots\ \psi(2n,x),\ \ldots$$

folgt ohne weiteres:

Die unendliche Reihe

$$(31'.) \qquad f_2(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{\nu^3}x}{\nu^2}$$

stellt eine im Intervalle $0\leqq x\leqq\pi$ *überall stetige Funktion dar. Die Fouriersche Kosinusreihe dieser Funktion für dasselbe Intervall* $0\leqq x\leqq\pi$ *ist an der Stelle* $x=0$ *divergent.*

Dieses Beispiel habe ich ebenfalls zuerst in der Note I. gegeben.

Definiere ich

$$F(x)=f_2(x) \text{ für } 0\leqq x<\pi$$

und

$$F(x)=f_2(2\pi-x)=-f_2(x) \text{ für } \pi<x\leqq 2\pi,$$

so ist $F(x)$ eine im Intervalle $0\leqq x\leqq 2\pi$ überall stetige Funktion, deren *Fourier*sche Reihe mit der Kosinusreihe von (31′.) identisch ist, und deren *Fourier*sche Reihe daher für $x=0$ divergiert.

Die Reihe (31′.) ist eine auf das Intervall $0\leqq x\leqq\pi$ bezügliche *Fourier*sche Sinusreihe. Es wird wohl manchem Leser interessant erscheinen, daß man durch eine auf das Intervall $0\leqq x\leqq\pi$ bezügliche *Fourier*sche Sinusreihe eine solche überall stetige Funktion definieren kann, deren *Fourier*sche Kosinusreihe (für dasselbe Intervall) an der Stelle $x=0$ divergiert.

Aus den früher auseinandergesetzten Eigenschaften der Folge

$$\theta(1,x),\ \theta(2,x),\ \ldots\ \theta(n,x),\ \ldots$$

folgt ohne weiteres:

Die Reihe

$$(32'.) \qquad f_3(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{\nu^3},x)}{\nu^2}$$

stellt eine im Intervalle $0\leqq x\leqq 2\pi$ *überall stetige Funktion dar. Ihre Fourier*sche *Reihe (diese ist eine reine Kosinusreihe) ist an der Stelle* $x=0$ *divergent.*

Dieses Beispiel habe ich zuerst in der Note II. veröffentlicht.

Die Stelle, an welcher die *Fourier*sche Kosinusreihe irgendeiner der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ divergiert, ist die Stelle $x=0$. Es ist nun leicht, eine überall stetige Funktion zu konstruieren, deren auf das Intervall $(0,2\pi)$ bezügliche *Fourier*sche Reihe an irgendeiner bestimmten Stelle a dieses Intervalles divergiert. Ich nehme z. B. die Funktion $f_1(x)$. Diese ist für $0\leqq x\leqq 2\pi$ durch die Reihe (22′.) definiert. Für die übrigen reellen Werte von x sei $f_1(x)$ durch die periodische Fortsetzung definiert. Dann ist $f_1(x-a)$ auch eine überall stetige Funktion, deren auf das Intervall $(0,2\pi)$ bezügliche *Fourier*sche Reihe *an der Stelle* $x=a$ *divergiert.*

Ich will noch ein viertes Beispiel $f_4(x)$ konstruieren.

Die Definition der Funktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ist zwar genügend einfach; bilde ich aber die *Fourier*sche Kosinusreihe irgendeiner dieser Funktionen:

$$a_0+a_1\cos x+\cdots+a_\varkappa\cos\varkappa x+\cdots,$$

so ist die Formel für $a_\varkappa$ nicht genügend einfach. Der Koeffizient $a_\varkappa$ ergibt sich für jede der drei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ in der Form einer unendlichen Reihe.

Ich will hier eine überall stetige Funktion $f_4(x)$ angeben, deren Fouriersche Kosinusreihe (für das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$) *an der Stelle $x=0$*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_\varkappa + \cdots$$

*divergiert, und für welche die $a_\varkappa$ einem einfachen Gesetze gehorchen**).

Es sei $\theta(n,r,x)$ das unter (33.) definierte trigonometrische Polynom. *Dann*, behaupte ich, *ist*

$$(33'.) \qquad f_4(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta(2^{\nu^3}, r_\nu, x)}{\nu^2},$$

*wo***)

$$r_1 = 0, \quad r_\nu = 2\cdot 2^{1^3} + 2\cdot 2^{2^3} + \cdots + 2\cdot 2^{(\nu-1)^3} \qquad (\nu = 2,3,\ldots)$$

eine solche im Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ definierte überall stetige Funktion, deren Fouriersche Kosinusreihe für $x=0$ divergiert und für welche der Koeffizient $a_\varkappa$ einem einfachen Gesetze gehorcht.

Daß die Kosinusreihe von $f_4(x)$ für $x=0$ divergiert folgt aus den früher auseinandergesetzten Eigenschaften der trigonometrischen Polynome $\theta(n,r,x)$.

Was nun das Gesetz der $a_\varkappa$ anbelangt, wo also

$$f_4(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_\varkappa \cos \varkappa x + \cdots \quad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

so läßt sich dieses Gesetz in folgender Weise sehr einfach angeben:

Man betrachte die aus $2n$ Zahlen bestehende Zahlengruppe

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \cdots -\frac{1}{n}.$$

Man bilde diese Gruppe für die folgenden Werte von n:

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, \cdots 2^{\nu^3}, \cdots$$

---

*) Herr *Lebesgue* hat in einem Briefe an mich diese interessante Frage gestellt.

**) Hier ist r_ν so gewählt, daß, wenn man die Glieder der Reihe (33'.) spaltet, die so entstehende Reihe die Kosinusse sämtlicher Multipla von x einmal, und nur einmal enthält. Die durch Spaltung der Glieder entstehende Reihe ist eben die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x.$$

(So entstehen Zahlengruppen, die resp. aus

$$2\cdot 2^{1^3},\ 2\cdot 2^{2^3},\ \dots\ 2\cdot 2^{\nu^3},\ \dots$$

Zahlen bestehen). *Man denke sich weiter diese Zahlengruppen der Reihe nach alle nebeneinander geschrieben, nachdem man aber vorher die Zahlen der ν-ten Gruppe alle durch ν^2 dividiert hat. So entsteht eine ganz bestimmte unendliche Folge von Zahlen, und das Gesetz der $a_\varkappa$ von $f_4(x)$ lautet einfach:*

Es ist $a_0=0$, und $a_\varkappa$ ist die $\varkappa$-te Zahl in der eben definierten unendlichen Zahlenfolge.

Es ist also

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=1,\ a_3=-1,\ a_4=-\frac{1}{2},$$

$$a_5=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{256},\ a_6=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{255},\ \dots\ .$$

10. Ich bemerke hierzu noch folgendes: Ich habe zum erstenmal eine divergente unendliche Reihe

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{39.}$$

aufgestellt, für welche

$$\lim_{n=\infty} u_n=0$$

ist und für welche die Folge der arithmetischen Mittel der Partialsummen

$$s_0,\ \frac{s_0+s_1}{2},\ \dots\ \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1},\ \dots$$

dennoch konvergiert. Ich verwies eben auf die divergente *Fourier*sche Reihe, die zu einer überall stetigen Funktion gehören kann. Nachher hat Herr *Pringsheim* solche Reihen (39.) auf ganz elementarem Wege hergeleitet*). In einer ungarisch geschriebenen Arbeit**) habe ich weitere Beispiele solcher Reihen (39.) mitgeteilt. Z. B. liefert die Reihenentwicklung von

---

*) Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Sitz. der bayer. Akademie, math.-phys. Kl. Bd. XXXI, Heft IV, 1901, S. 505—524.

**) „Über die Bestimmung asymptotischer Werte“ (ungarisch), Math. és Term. Értesitö, Bd. XXVII, 1909.

Vgl. auch meine Note: Sur une méthode de M. *Darboux*. Comptes Rendus de l'acad. des sciences. Paris. T. 147 (30 novembre 1908).

$$\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{1-z} = u_0 + u_1 z + \cdots + u_n z^n + \cdots$$

eine solche Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots .$$

Hier habe ich nun wieder ein neues Beispiel für eine Reihe wie (39.) aufgestellt; nämlich die eben definierte Reihe $\sum_{x=1}^{\infty} a_x$ ist eine solche.

§ 4. Bemerkungen über die Natur der Divergenz dieser *Fourier*reihen.

11. Im folgenden möchte ich einige Bemerkungen mitteilen, welche die Divergenz der Kosinusreihen der Funktionen (22′.), (31′.), (32′.), (33′.) näher charakterisieren.

Es sei $f(x)$ eine überall stetige Funktion, und es seien $s_x(x)$ ihre *Fourier*schen Partialsummen. Dann ist bekanntlich

$$\liminf_{x=\infty} s_x(x) \leqq f(x) \leqq \limsup_{x=\infty} s_x(x).$$

Die Stelle $x=0$ betrachtend, kann ich diesen Satz kurz so aussprechen, daß die *Fourier*schen Partialsummen $s_x(0)$ $(x=0,1,2,\ldots)$ um den Wert $f(0)$ der stetigen Funktion oszillieren, wobei es aber auch vorkommen kann — und dies ist bekannt in dem Falle, wo die Reihe für $x=0$ konvergent ist — daß z. B. stets $s_x(0) \geqq f(0)$ ist. *Die Beispiele* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ *zeigen nun, daß dies auch im Falle der Divergenz vorkommen kann.*

In der Tat, sämtliche Partialsummen $s_x(0)$ sind für sämtliche Funktionen $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ positiv. Daher sind auch sämtliche $s_x(0)$ von $f_1(x)$ positiv. Da $f_1(0)=0$, habe ich hier also in der Tat

$$s_x(0) > f(0) \text{ für } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Auch für $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ liegen die Partialsummen $s_x(x)$ einseitig zum Funktionswert $f(0)=0$.

12. Ich betrachte eine der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ und bezeichne sie mit $f(x)$. Ich habe erhalten, daß an der Stelle $x=0$

$$f(0)=0$$

ist, und daß für diese Stelle die Folge der Partialsummen der *Fourier*schen Kosinusreihe

$$s_0(0),\ s_1(0),\ s_2(0),\ \dots\ s_n(0),\ \dots$$

eine Folge von positiven (oder wenigstens nicht negativen) Zahlen ist. Diese Folge ist, wie ich erwiesen habe, divergent. Bilde ich aber die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_0(0),\ \frac{s_0(0)+s_1(0)}{2},\ \dots\ \frac{s_0(0)+\dots+s_n(0)}{n+1},\ \dots,$$

so muß diese Folge konvergieren, und zwar gegen $f(0)=0$ als Grenzwert*).

Diese Tatsache läßt sich besonders einfach für die Funktion $f_4(x)$ (definiert durch Gleichung (33′.) des § 3.) *verifizieren.* Es ist in der Tat recht einfach einzusehen, daß die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Reihe

$$a_1+a_2+\dots+a_\varkappa+\dots \tag{40.}$$

gegen Null konvergieren. Man muß nur in Betracht ziehen, daß die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\dots+1-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{n}+0+0+0+\dots$$

alle kleiner sind als eine positive Konstante, die von n unabhängig ist. Dies möchte ich aber hier nicht ausführen; ich bemerke nur noch, daß z. B. diejenigen Partialsummen der Reihe (40.), deren Indizes

$$2,\ 2\cdot 2^{1^3}+2^{2^3},\ 2\cdot 2^{1^3}+2\cdot 2^{2^3}+2^{3^3},\ \dots\ 2\cdot 2^{1^3}+\dots+2\cdot 2^{\nu^3}+2^{(\nu+1)^3},\ \dots$$

sind, gegen Unendlich konvergieren, während z. B. die Partialsummen von (40.) mit den Indizes

$$2\cdot 2^{1^3},\ 2\cdot 2^{1^3}+2\cdot 2^{2^3},\ \dots\ 2\cdot 2^{1^3}+\dots+2\cdot 2^{\nu^3},\ \dots$$

alle gleich Null sind und daher gegen Null konvergieren.

13. Der Frage nach einer überall stetigen Funktion, deren *Fourier*sche Reihe an einer Stelle x des Intervalles $(0,2\pi)$ divergiert, will ich hier noch eine andere Form geben.

---

*) S. meine Note: Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes Rendus de l'acad. des sciences. Paris, 10 décembre 1900, und meine früher zitierte Arbeit in den Math. Annalen Bd. 58, (1904).

Da bei der *Fourier*schen Reihe die Stellen x des Intervalles $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sämtlich die gleiche Rolle spielen, genügt es, $x=0$ zu nehmen. Weiter kann ich die überall stetige Funktion $f(x)$ der Bedingung

$$f(x)=f(2\pi-x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

unterwerfen.

Die *Fourier*sche Reihe einer solchen Funktion ist eine reine Kosinusreihe:

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+\cdots+a_\varkappa\cos \varkappa x+\cdots \quad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

wo

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt,\ a_\varkappa=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos \varkappa t\,dt. \qquad (\varkappa=1,2,3,\ldots)$$

Da für $x=0$ die Kosinusreihe in

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_\varkappa+\cdots$$

übergeht, habe ich also obiges Problem auf folgende Form gebracht:

Es soll eine im Intervalle

$$0 \leqq x \leqq \pi$$

überall stetige Funktion $f(x)$ konstruiert werden, für welche die unendliche Reihe, gebildet aus ihren Kosinuskonstanten

(41.) $$a_0+a_1+\cdots+a_\varkappa+\cdots,$$

(42.) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt,\ a_\varkappa=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos \varkappa t\,dt \qquad (\varkappa=1,2,3,\ldots)$$

eine divergente Reihe ist.

Dieses Problem wurde nun im vorhergehenden gelöst. Bedeutet $f(x)$ irgendeine der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, so ist die Reihe (41.) divergent.

Ich erinnere daran, daß die Folge der arithmetischen Mittel der Partialsummen der Reihe (41.) für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ konvergent ist und gegen $f(0)$ konvergiert und daß

$$a_0^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_\varkappa^2+\cdots$$

ebenfalls für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ konvergent ist. Daraus folgt, daß

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0$$

ist.

Bei den zumeist gebräuchlichen endlichen und stetigen Funktionen kann man sogar gewöhnlich eine Konstante G angeben, so daß

$$|a_n| < \frac{G}{n}. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Ich will aber hier zeigen, daß für eine geeignete *endliche* und *stetige* Funktion $f(x)$ die Kosinuskonstanten *beliebig langsam* gegen Null konvergieren können.

Es sei z. B. $f(x)$ durch die unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 4^{\nu^2} x}{\nu^2}$$

definiert.

Die Kosinuskonstanten a_n dieser Funktion $f(x)$ sind alle gleich Null, ausgenommen diejenigen a_n, deren Indizes

$$4,\ 4^{2^2},\ \ldots\ 4^{\nu^2},\ \ldots$$

sind.

Es sei $n = 4^{\nu^2}$. Dann ist

$$a_n = \frac{1}{\nu^2} = \frac{\log 4}{\log n} > \frac{1}{\log n}.$$

Es ist also für unendlich viele Werte des Index n

$$a_n > \frac{1}{\log n}.$$

Ähnlich kann man überall stetige Funktionen $f(x)$ definieren, für welche bei unendlich vielen Werten des Index n die Ungleichung

$$a_n > \frac{1}{\log\log n}$$

stattfindet.

§ 5. Schlußbemerkungen.

14. Aus dem vorhergehenden ersieht man, daß die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ schon sehr einfache und leicht analysierbare Beispiele von überall stetigen Funktionen liefern, deren *Fourier*sche Reihe an einer Stelle des Intervalles $0 \leqq x \leqq 2\pi$ divergiert.

Bekanntlich hat *P. du Bois-Reymond* entdeckt, daß solche stetigen Funktionen existieren. Seine Konstruktion von Beispielen und die seiner Nachfolger beruhen auf einem andern Prinzipe. Diese Beispiele sind, wenn auch sehr lehrreich, doch weniger einfach.

Du Bois-Reymond hat noch die Frage gestellt, ob es überall stetige Funktionen gibt, deren *Fourier*sche Reihe *überall* divergiert.

Dieses Problem ist noch heute ungelöst.

Man könnte vielleicht glauben, daß z. B. die *Fourier*sche Kosinusreihe der Funktion

$$(31'.) \qquad f_2(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2^{\nu^3}x)}{\nu^2} \qquad (0\leqq x\leqq\pi)$$

nicht nur für $x=0$ divergiert (dies habe ich bewiesen), sondern auch für jede andere Stelle des Intervalles $(0,\pi)$.

Das ist aber nicht der Fall. Es sei x_0 eine innere Stelle des Intervalles $(0,\pi)$, welche die Form

$$(43.) \qquad x_0=\frac{r}{2^s}\pi$$

hat, wo r, s positive ganze Zahlen bedeuten.

Weiter bewege sich die reelle Variable t zwischen so engen Grenzen, daß die Werte

$$x_0+t$$

noch alle in das Innere des Intervalles $(0,\pi)$ fallen. Dann ist

$$f_2(x_0+t)=\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{\sin(2^{\nu^3}(x_0+t))}{\nu^2}+\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{\sin(2^{\nu^3}t)}{\nu^2}=\Phi'(t)+\Phi''(t),$$

wo k die kleinste positive Zahl bedeutet, für welche $k^3>s$ ist.

Die Funktion $\Phi'(t)$ ist eine ganze transzendente Funktion von t und genügt also in der Umgebung von $t=0$ gewiß jenen Bedingungen, die zur Konvergenz der *Fourier*schen Reihe hinreichen. Aber auch $\Phi''(t)$ genügt in der (zweiseitigen) Umgebung von $t=0$ einer solchen Bedingung. Es ist nämlich für jedes t (und insbesondere für eine gewisse kleine Umgebung von $t=0$)

$$\Phi''(-t)=-\Phi''(t).$$

Daher *konvergiert* die *Fourier*sche Kosinusreihe von $f_2(x)$ an der Stelle

$$x_0 = \frac{r}{2^s}\pi . \tag{43.}$$

Die Stellen (43.) erfüllen das Intervall $(0, \pi)$ überall dicht.

Vielleicht werden aber die Betrachtungen dieser Arbeit doch dazu verhelfen können, daß man auch über die Frage nach der Existenz von überall stetigen Funktionen mit *überall* divergenter *Fourier*reihe endlich Klarheit bekommt.

Die Gleichung der *Schwarz*schen Minimalfläche in ihrem Zusammenhange mit den hyperelliptischen Thetafunktionen.

Von Herrn *G. Hettner* in Berlin.

In der Abhandlung „Bestimmung einer speziellen Minimalfläche“*) hat Herr *H. A. Schwarz* die Gleichung derjenigen einfach zusammenhängenden Minimalfläche aufgestellt, die durch ein von vier gleich langen Strecken gebildetes räumliches Vierseit hindurchgeht, bei dem je zwei zusammenstoßende Strecken einen Winkel von 60^0 miteinander bilden. Für diese Fläche ist in den Ausdrücken

$$x = \int_0^s (1-s^2)\mathfrak{F}(s)\,ds \quad + \int_0^{s_1} (1-s_1^2)\mathfrak{F}_1(s_1)\,ds_1,$$

$$y = \int_0^s i(1+s^2)\mathfrak{F}(s)\,ds \quad - \int_0^{s_1} i(1+s_1^2)\mathfrak{F}_1(s_1)\,ds_1,$$

$$z = \int_0^s 2s\mathfrak{F}(s)\,ds \qquad + \int_0^{s_1} 2s_1\mathfrak{F}_1(s_1)\,ds_1,$$

die *Weierstraß***) für die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer Minimalfläche angegeben hat,

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-14\,s^4+s^8}}, \quad \mathfrak{F}(0) = +1$$

---

*) *H. A. Schwarz*, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1 (1890), S. 6—125.

**) *Weierstraß*, Mathematische Werke, Bd. 3 (1903), S. 43. — Um mit den von *Schwarz* entwickelten Formeln in voller Übereinstimmung zu bleiben, ist hier in den *Weierstraß*schen Formeln $2\mathfrak{F}(s)$ statt $\mathfrak{F}(s)$ gesetzt worden.

und

$$\mathfrak{F}_1(s_1)=\frac{1}{\sqrt{1-14s_1^4+s_1^8}},\quad \mathfrak{F}_1(0)=+1$$

zu setzen*), und um die reellen Punkte der Fläche zu erhalten, sind den Variablen s und s_1 konjugiert komplexe Werte beizulegen. Die Integrationen zwischen denselben Grenzen sind auf gleichen Wegen auszuführen.

Für die *Schwarz*sche Fläche treten daher in den vorstehenden Formeln drei linear unabhängige Integrale erster Art des durch die Gleichung

$$t^2=1-14s^4+s^8$$

definierten hyperelliptischen Gebildes vom Range 3 auf. Durch Einführung neuer Variablen führt *Schwarz* diese hyperelliptischen Integrale auf elliptische zurück und stellt mittels des Additionstheorems der elliptischen Integrale jede der drei Koordinaten x, y, z durch ein elliptisches Integral dar, dessen obere Grenze eine algebraische Funktion von s und s_1 ist. Die Elimination von s und s_1 führt dann zu der Gleichung der Fläche, die sich in der Form ergibt, daß eine in bezug auf elliptische Funktionen der drei Koordinaten ganze rationale Funktion gleich Null ist.

Angeregt durch diese Arbeit von *Schwarz* hat *Weierstraß* auf eine besondere Gattung von Minimalflächen aufmerksam gemacht**), bei denen mit Hilfe des Umkehrungsproblems der hyperelliptischen Integrale die Elimination von s und s_1 in den obigen Formeln gelingt und deren Gleichung in der Form

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)=0$$

dargestellt werden kann, wo v_1, v_2, v_3 lineare Funktionen der Koordinaten x, y, z sind. Die in diesen linearen Funktionen auftretenden Konstanten und die Moduln der Thetafunktion sind in jedem einzelnen Fall besonders zu bestimmen.

Für die zu dieser Gattung gehörende *Schwarz*sche Fläche soll nun diese Bestimmung im folgenden wirklich durchgeführt werden. Die Thetafunktion dreier Veränderlichen muß hier in ein Aggregat von Thetafunktionen einer Veränderlichen zerfallen, und je nach der Wahl des Moduls

*) *Schwarz*, Bd. 1, S. 32.

**) *Weierstraß*, Bd. 3, S. 241—247.

dieser elliptischen Thetafunktionen ergeben sich die drei verschiedenen Formen, in denen *Schwarz* die Gleichung der Fläche aufgestellt hat*).

1.

Die in den *Weierstraß*schen Formeln auftretenden hyperelliptischen Integrale werden auf andere, für die Untersuchung ihrer Periodizität geeignetere zurückgeführt, wenn man zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem (x', y', z') übergeht, dessen z'-Achse mit der z-Achse zusammenfällt, während die y'-Achse den Winkel zwischen der x- und y-Achse halbiert**); dann ist

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad z' = z.$$

Wenn

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = a$$

gesetzt wird, so sind die acht Wurzeln der Gleichung $1 - 14s^4 + s^8 = 0$ gleich

$$a, \frac{1}{a}; \quad ai, \frac{i}{a}; \quad -a, -\frac{1}{a}; \quad -ai, -\frac{i}{a}.$$

Es möge nun noch das Koordinatensystem (x', y', z') parallel mit sich so verschoben werden, daß die unteren Grenzen der sechs Integrale gleich $-a$ statt gleich Null werden. Bezeichnet man die Koordinaten eines Punktes der Fläche in bezug auf dieses dritte System wieder einfach mit x, y, z, da eine Verwechslung mit dem ersten System ausgeschlossen ist, so wird***)

$$x = \int_{-a}^{s} \sqrt{-i}(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds + \int_{-a}^{s_1} \sqrt{i}\,(1+is_1^2)\,\mathfrak{F}(s_1)\,ds_1,$$

$$y = \int_{-a}^{s} \sqrt{i}\,(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds + \int_{-a}^{s_1} \sqrt{-i}(1-is_1^2)\,\mathfrak{F}(s_1)\,ds_1,$$

$$z = \int_{-a}^{s} 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds + \int_{-a}^{s_1} 2s_1\,\mathfrak{F}(s_1)\,ds_1;$$

---

*) *Schwarz*, Bd. 1, S. 73, 75, 137.
**) *Schwarz*, Bd. 1, S. 37.
***) *Schwarz*, Bd. 1, S. 37 u. 44.

dabei haben $\sqrt{i}$ und $\sqrt{-i}$ die Werte $\frac{1+i}{+\sqrt{2}}$ und $\frac{1-i}{+\sqrt{2}}$.

Damit auf den rechten Seiten die zweiten Integrale dieselbe Form wie die ersten annehmen, führen wir statt s_1 eine neue Variable

$$s' = -\frac{1}{s_1}$$

ein*). Dann ist

$$\mathfrak{F}(s') = -s_1^4 \mathfrak{F}(s_1)$$

zu setzen, und die Ausdrücke für die Koordinaten eines Punktes der *Schwarz*schen Minimalfläche gehen in

$$x = \int_{-a}^{s} \sqrt{-i}(1-is^2)\mathfrak{F}(s)\,ds + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} \sqrt{-i}(1-is^2)\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$y = \int_{-a}^{s} \sqrt{i}\,(1+is^2)\mathfrak{F}(s)\,ds \quad + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} \sqrt{i}\,(1+is^2)\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$z = \int_{-a}^{s} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds \qquad\qquad + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds$$

über. In diesen Formeln treten drei linear unabhängige hyperelliptische Integrale erster Art auf. Das Bestehen dieser drei Gleichungen zwischen x, y, z und s, s' ist daher, wie sich aus den Sätzen über das Verschwinden der Thetafunktion ergibt**), hinreichend und notwendig dafür, daß für gewisse lineare Funktionen v_1, v_2, v_3 der Koordinaten x, y, z

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = 0$$

ist. Die *Schwarz*sche Minimalfläche gehört also in der Tat der von *Weierstraß* betrachteten besonderen Gattung an.

2.

Zunächst müssen die Werte der drei hyperelliptischen Integrale

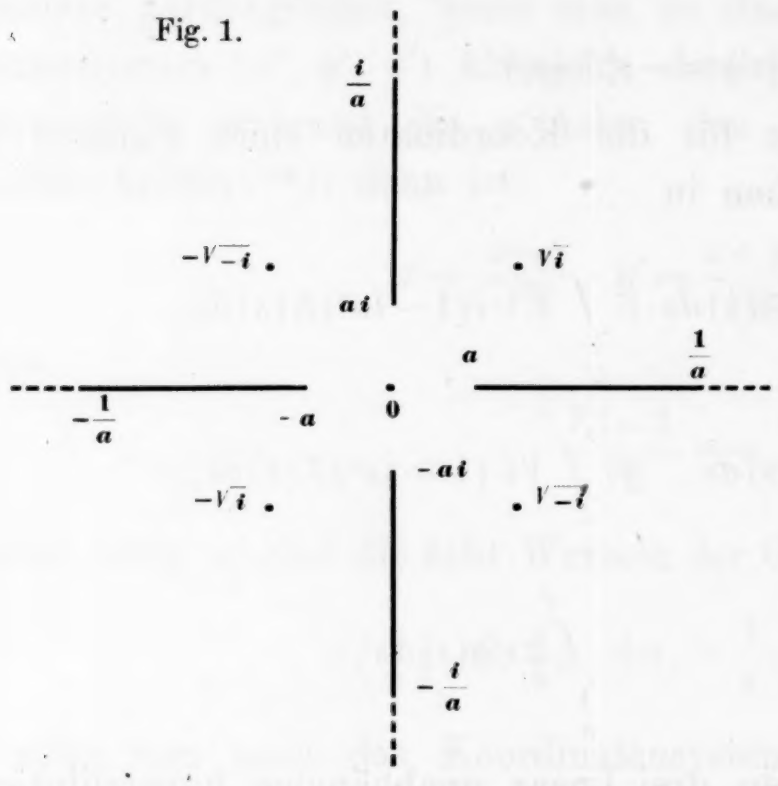
$$\int_0^s \sqrt{-i}(1-is^2)\mathfrak{F}(s)ds,\ \int_0^s \sqrt{i}\,(1+is^2)\mathfrak{F}(s)ds,\ \int_0^s 2s\mathfrak{F}(s)ds$$

*) *Weierstraß*, Bd. 3, S. 243.

**) *Weierstraß*, Bd. 3, S. 246 und Bd. 4 (1902), S. 603.

für die singulären Stellen des algebraischen Gebildes $t^2 = 1 - 14s^4 + s^8$ berechnet werden. Die Werte der Quadratwurzel $\sqrt{1-14s^4+s^8}$ seien eindeutig auf einer über die Ebene s ausgebreiteten zweiblättrigen *Riemann*schen Fläche mit den vier Verzweigungsschnitten $\left(a \cdots \frac{1}{a}\right)$, $\left(ai \cdots \frac{i}{a}\right)$, $\left(-a \cdots -\frac{1}{a}\right)$, $\left(-ai \cdots -\frac{i}{a}\right)$ dargestellt (Fig. 1)*). Für einen Punkt s_0 des oberen Blattes möge der Quadratwurzel derjenige Wert beigelegt werden, der gleich 1 wird, wenn man s stetig, ohne einen Verzweigungsschnitt zu kreuzen, von s_0 in 0 überführt. $\mathfrak{F}(s_0)$ sei der reziproke Wert des so bestimmten Wertes der Wurzel.

Fig. 1.



Werden die vier Verzweigungsschnitte über die Punkte $\frac{1}{a}$, $\frac{i}{a}$, $-\frac{1}{a}$, $-\frac{i}{a}$ hinaus geradlinig in das Unendliche verlängert, so sind die Werte der drei hyperelliptischen Integrale eindeutig bestimmt, solange der Integrationsweg nicht einen der Schnitte oder eine ihrer Verlängerungen überschreitet, und es bestehen die beiden Relationen

$$\int_0^{s_0 i} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds = -\int_0^{s_0} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad \int_0^{-s_0} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds = \int_0^{s_0} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds.$$

Mittels der Substitution $s^2 = u$ wird

$$\int_0^{s} 2s\mathfrak{F}(s)\,ds = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1-14u^2+u^4}},$$

die Werte des hyperelliptischen Integrals auf der linken Seite lassen sich daher auf die eines elliptischen Integrals zurückführen. Setzt man für positive Werte der Quadratwurzeln

*) *Schwarz*, Bd. 1, S. 38 u. 39.

$$2\int_0^{a^2}\frac{du}{\sqrt{1-14u^2+u^4}}=\omega,$$

$$2i\int_{a^2}^{1}\frac{du}{\sqrt{-(1-14u^2+u^4)}}=2i\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1+14u^2+u^4}}=\omega',$$

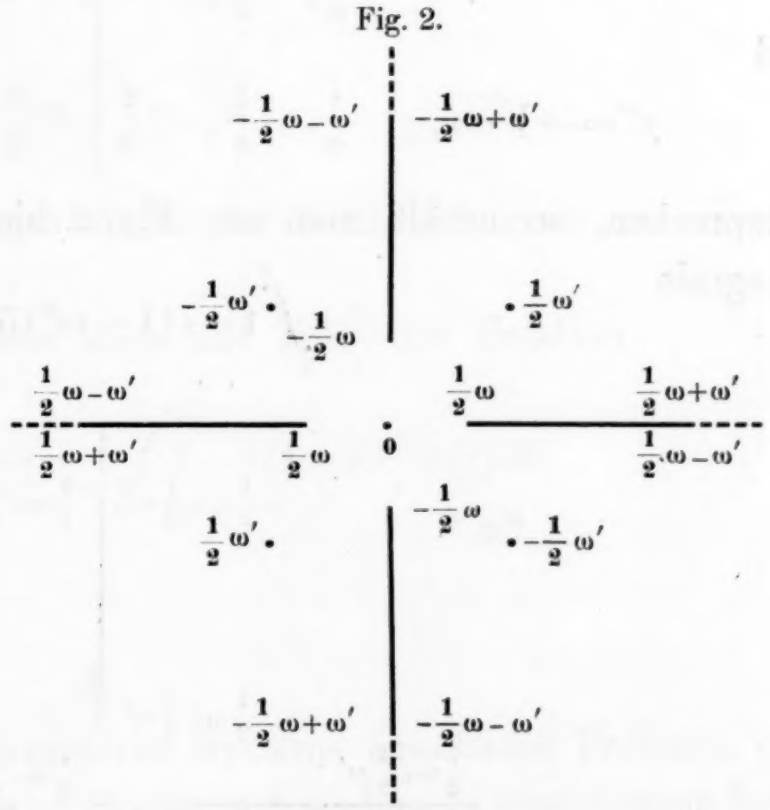
so sind ω und ω' halbe Perioden des elliptischen Integrals. Das zweite Integral für ω' erhält man aus dem ersten, wenn man die Integration über einen die beiden singulären Punkte a^2 und $\frac{1}{a^2}$ umfassenden geschlossenen Integrationsweg durch eine über die imaginäre Achse ersetzt.

So ergibt sich für geradlinige, im oberen Blatte liegende Integrationswege

$$\int_0^a 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds=\frac{\omega}{2},\quad \int_0^{\sqrt{i}}2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds=\frac{\omega'}{2},\quad +\int_a^{\frac{1}{a}}2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds=\omega',$$

wobei durch die Marke (+) oder (—) an einem Integral angedeutet werden soll, daß der Integrationsweg auf der positiven oder negativen Seite*) des Verzweigungsschnitts endet. Aus diesen drei Werten finden sich mit Hilfe der beiden vorher aufgestellten Relationen für alle in Fig. 1 eingezeichneten Argumente s die in Fig. 2 angegebenen Werte**) des eindeutig beschränkten Integrals $\int_0^s 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds$.

Fig. 2.



Die beiden anderen hyperelliptischen Integrale erster Art lassen sich durch die Substitutionen***)

*) *Weierstraß*, Bd. 4, S. 288.

**) *Schwarz*, Bd. 1, S. 40.

***) *Schwarz*, Bd. 1, S. 41 u. 43.

$$\frac{1+s\sqrt{i}}{s-\sqrt{-i}}=s', \quad \frac{1+s\sqrt{-i}}{s-\sqrt{i}}=s''$$

auf das eben behandelte Integral zurückführen; es wird

$$\int_0^s \sqrt{-i}\,(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds=-\int_{-\sqrt{i}}^{s'} 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$\int_0^s \sqrt{i}\,(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds=-\int_{-\sqrt{-i}}^{s''} 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

und zwar sind diese Gleichungen auch dem Zeichen nach richtig, solange s, s', s'' in der Umgebung der unteren Grenzen der Integrale liegen. Da nun den Werten

$$s = \quad 0, \quad a, \quad \frac{1}{a}, \quad ai, \quad \frac{i}{a}, \quad -a, \quad -\frac{1}{a}, \quad -ai, \quad -\frac{i}{a}$$

die Werte

$$s' = -\sqrt{i}, \quad -\frac{i}{a}, \quad \frac{1}{a}, \quad -ai, \quad a, \quad -a, \quad ai, \quad -\frac{1}{a}, \quad \frac{i}{a}$$

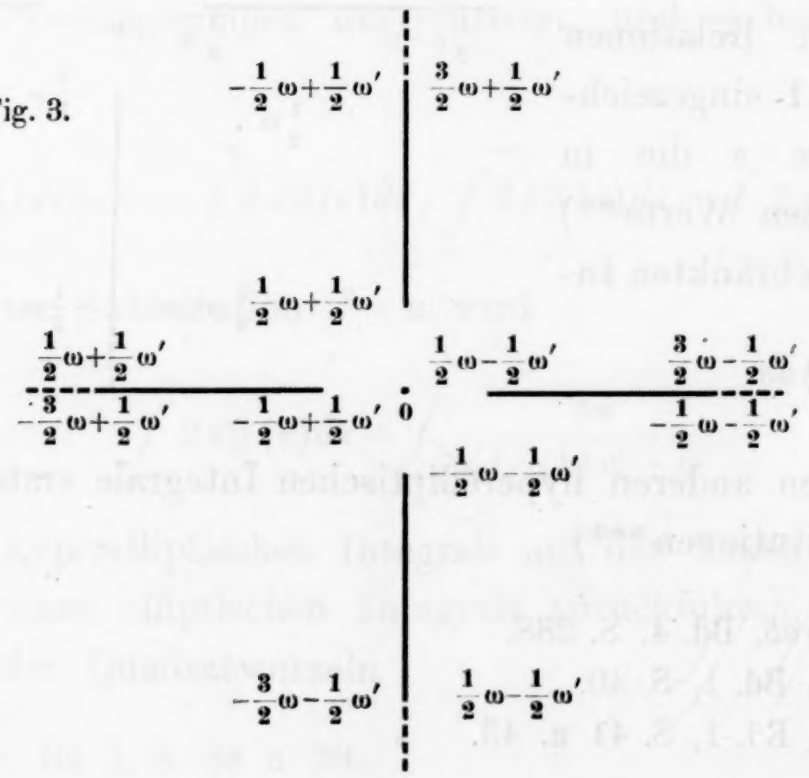
und

$$s''=-\sqrt{-i}, \quad \frac{i}{a}, \quad \frac{1}{a}, \quad -\frac{1}{a}, \quad -\frac{i}{a}, \quad -a, \quad -ai, \quad ai, \quad a$$

entsprechen, so erhält man aus Fig. 2 hiernach Fig. 3 für die Werte des Integrals

$$\int_0^s \sqrt{-i}\,(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$

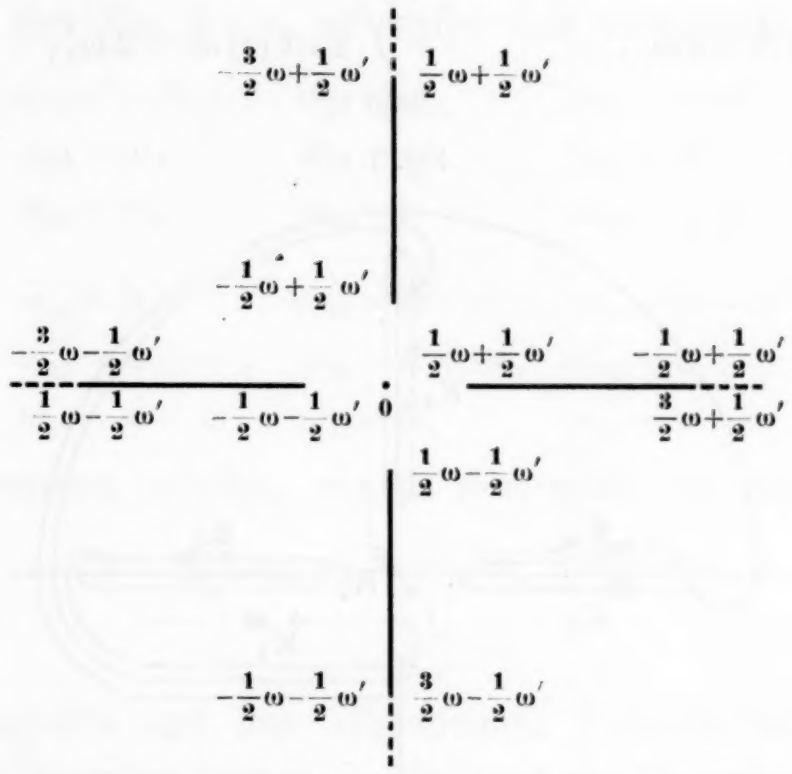
Fig. 3.



und Fig. 4 für die Werte des Integrals

$$\int_0^s \sqrt{i}\,(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds.$$

Fig. 4.



Die Integrationswege liegen dabei für beide Integrale im oberen Blatte der *Riemann*schen Fläche.

Die Figuren 3 und 4 gehen auch mit Hilfe der Relation

$$\int_0^{s_0 i} \sqrt{i}\,(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = -\int_0^{s_0} \sqrt{-i}\,(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$

auseinander hervor.

3.

Zur Bestimmung eines primitiven Systems simultaner Perioden der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Art sind sechs geschlossene Integrationswege K_1, K_1'; K_2, K_2'; K_3, K_3' von der Beschaffenheit aufzusuchen, daß nur der zweite den ersten, der vierte den dritten, der sechste den fünften einmal in positivem Sinne durchkreuzt. Werden dann die vollständigen Integrale*)

*) *Weierstraß*, Bd. 4, S. 330, 337, 361.

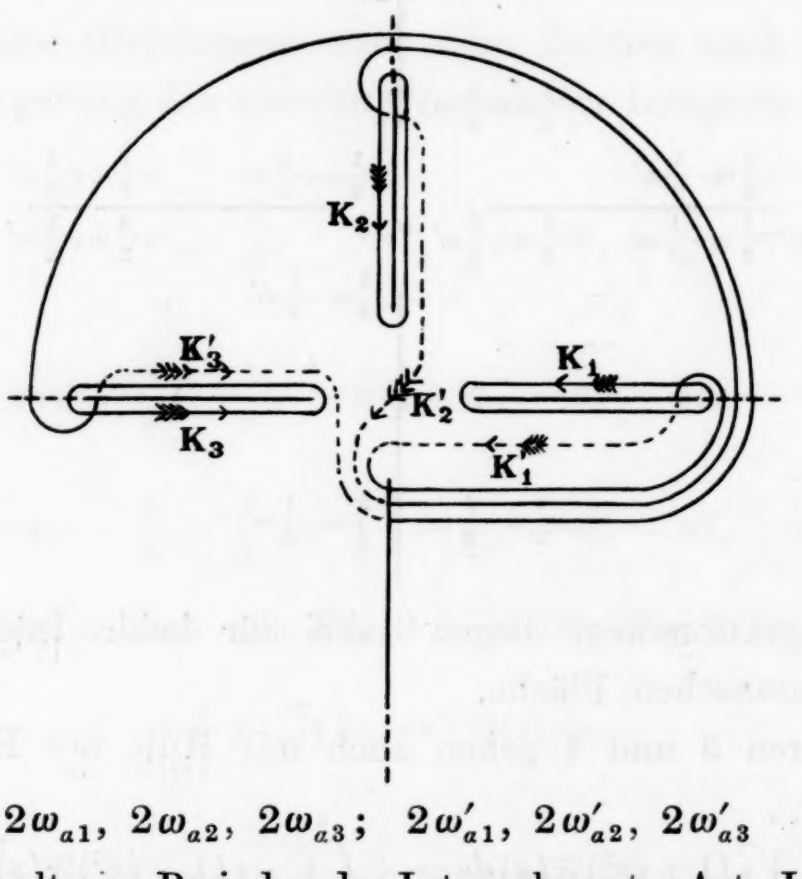
$$\int_{(K_\beta)} \sqrt{-i}\,(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = 2\omega_{1\beta}, \quad \int_{(K'_\beta)} \sqrt{-i}\,(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = 2\omega'_{1\beta},$$

$$\int_{(K_\beta)} \sqrt{i}\,(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = 2\omega_{2\beta}, \quad \int_{(K'_\beta)} \sqrt{i}\,(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = 2\omega'_{2\beta},$$

$$\int_{(K_\beta)} 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds = 2\omega_{3\beta}, \qquad \int_{(K'_\beta)} 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds = 2\omega'_{3\beta}$$

gesetzt, so bilden

Fig. 5.



$$2\omega_{a1},\ 2\omega_{a2},\ 2\omega_{a3};\quad 2\omega'_{a1},\ 2\omega'_{a2},\ 2\omega'_{a3} \qquad (a=1,2,3)$$

das System der simultanen Perioden der Integrale erster Art. In dem vorliegenden Falle mögen die Integrationskreise entsprechend der Fig. 5 gewählt werden, wobei die ausgezogenen Linien im oberen, die punktierten im unteren Blatt der *Riemann*schen Fläche liegen sollen. Die Kreise K_1 und K'_1, K_2 und K'_2, K_3 und K'_3 durchkreuzen sich in der Nähe der Punkte $\frac{1}{a}$, $\frac{i}{a}$, $-\frac{1}{a}$, während andere Durchkreuzungen der sechs Kreise nicht vorkommen.

Indem man die Kreise in zulässiger Weise abändert, ergibt sich

$$\omega_{a1} = -\int_{a}^{+\frac{1}{a}}, \quad \omega_{a2} = -\int_{ai}^{+\frac{i}{a}}, \qquad \omega_{a3} = -\int_{-a}^{+-\frac{1}{a}},$$

$$\omega'_{a1} = \int_{-ai}^{-\frac{1}{a}}, \quad \omega'_{a2} = \int_{-ai}^{-\frac{1}{a}} + \int_{a}^{-\frac{i}{a}}, \quad \omega'_{a3} = \int_{-ai}^{-\frac{1}{a}} + \int_{a}^{-\frac{i}{a}} + \int_{ai}^{--\frac{1}{a}},$$

wo für $\alpha = 1, 2, 3$ die zu integrierenden Funktionen der Reihe nach gleich

$$\sqrt{-i}(1-is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad \sqrt{i}(1+is^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$

sind. Die Integrationswege sollen geradlinig angenommen werden und im oberen Blatte der *Riemann*schen Fläche liegen. Entnimmt man die Werte dieser Integrale den Fig. 2—4, so ergibt sich unmittelbar

$$\begin{array}{lll} \omega_{11} = -\omega, & \omega_{21} = \omega, & \omega_{31} = -\omega' \\ \omega_{12} = \omega, & \omega_{22} = \omega, & \omega_{32} = \omega' \\ \omega_{13} = \omega, & \omega_{23} = -\omega, & \omega_{33} = -\omega' \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \omega'_{11} = 0, & \omega'_{21} = \omega + \omega', & \omega'_{31} = \omega - \omega' \\ \omega'_{12} = \omega + \omega', & \omega'_{22} = \omega + \omega', & \omega'_{32} = 0 \\ \omega'_{13} = \omega + \omega', & \omega'_{23} = 0, & \omega'_{33} = \omega - \omega'. \end{array}$$

Diese halben Perioden erfüllen, wie es sein muß, die drei Relationen*)

$$\sum_{\gamma=1}^{3} (\omega_{\alpha\gamma}\,\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\,\omega'_{\alpha\gamma}) = 0. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \alpha < \beta)$$

4.

Zum Vergleich mit den allgemeinen Formeln in der Theorie der hyperelliptischen Transzendenten werde jetzt vorübergehend

$$-ai = a_0, \ \frac{1}{a} = a_1, \ a = a_2, \ \frac{i}{a} = a_3, \ ai = a_4, \ -\frac{1}{a} = a_5, \ -a = a_6, \ -\frac{i}{a} = a_7$$

gesetzt; dann nimmt die Gleichung $t^2 = 1 - 14s^4 + s^8$ die Form

$$t^2 = (s-a_0)(s-a_1)\cdots(s-a_7)$$

an. Die Punkte $a_0, a_1, \ldots a_7$ der Ebene s haben dabei eine solche Lage, daß die gebrochene Gerade $(a_0\, a_1 \ldots a_7)$ sich nicht selbst schneidet**). Ferner sei

$$\frac{\sqrt{-i}(1-is^2)}{t} = H(s,t)_1, \quad \frac{\sqrt{i}(1+is^2)}{t} = H(s,t)_2, \quad \frac{2s}{t} = H(s,t)_3,$$

so sind

$$\int H(s,t)_1\,ds, \ \int H(s,t)_2\,ds, \ \int H(s,t)_3\,ds$$

drei linear unabhängige Integrale erster Art.

Aus den Gleichungen

$$u_\alpha = \int_{a_1}^{s} H(s,t)_\alpha\,ds + \int_{a_3}^{s'} H(s,t)_\alpha\,ds + \int_{a_5}^{s''} H(s,t)_\alpha\,ds \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

*) *Weierstraß*, Bd. 4, S. 332.

**) *Henoch*, De Abelianarum functionum periodis (Berolini 1867), S. 6.

erhält man durch Lösung des Umkehrungsproblems die Darstellung der hyperelliptischen Funktionen durch die ϑ-Funktionen; es ergibt sich*)

$$C_\lambda \sqrt{\frac{(a_\lambda - s)(a_\lambda - s')(a_\lambda - s'')}{(a_7 - s)(a_7 - s')(a_7 - s'')}} = \frac{\vartheta(v_1, v_2, v_3)_\lambda}{\vartheta(v_1, v_2, v_3)}, \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots 6)$$

wo $C_0, C_1, \ldots C_6$ von s, s', s'' unabhängige Konstanten bedeuten. Die Variablen u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 hängen durch die Relationen

$$u_\alpha = 2\omega_{\alpha 1} v_1 + 2\omega_{\alpha 2} v_2 + 2\omega_{\alpha 3} v_3 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

miteinander zusammen, in denen

$$\omega_{\alpha 1} = \overset{+}{\int_{a_1}^{a_2}} H(s,t)_\alpha ds, \quad \omega_{\alpha 2} = \overset{+}{\int_{a_3}^{a_4}} H(s,t)_\alpha ds, \quad \omega_{\alpha 3} = \overset{+}{\int_{a_5}^{a_6}} H(s,t)_\alpha ds \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ist; die Integrationen sind dabei, wie früher, im oberen Blatt der *Riemann*schen Fläche auf direktem Wege auszuführen.

Demnach verschwindet $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$, wenn $s'' = a_7$, also

$$u_\alpha = \int_{a_1}^{s} H(s,t)_\alpha ds + \int_{a_3}^{s'} H(s,t)_\alpha ds + \int_{a_5}^{a_7} H(s,t)_\alpha ds$$

$$= \int_{-a}^{s} H(s,t)_\alpha ds + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} H(s,t)_\alpha ds + \int_{\frac{i}{a}}^{-a} H(s,t)_\alpha ds + \int_{-\frac{1}{a}}^{-\frac{i}{a}} H(s,t)_\alpha ds \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

gesetzt wird. Die Integrationswege können beliebig angenommen werden, nur müssen sie für $\alpha = 1, 2, 3$ dieselben sein.

Die Werte der beiden letzten Integrale auf der rechten Seite lassen sich aus Fig. 2—4 entnehmen. Wählt man als Integrationswege die im oberen Blatt der *Riemann*schen Fläche liegenden Strecken $\left(\frac{i}{a} \cdots -a\right)$ und $\left(-\frac{1}{a} \cdots -\frac{i}{a}\right)$, so wird

$$\int_{\frac{i}{a}}^{-a} H(s,t)_\alpha ds + \int_{-\frac{1}{a}}^{-\frac{i}{a}} H(s,t)_\alpha ds$$

für $\alpha = 1, 2$ gleich $-\omega'$ und für $\alpha = 3$ gleich ω'.

---

*) *Henoch*, S. 5 u. 6; vergl. auch *Königsberger*, dieses Journ., Bd. 64 (1865), S. 21 und *Weierstraß*, Bd. 3, S. 292.

Die Summe der ersten beiden Integrale rechts ist, wie wir zum Schluß des § 1 fanden, für $\alpha=1,2,3$ gleich x,y,z. Sind daher x,y,z die Koordinaten eines Punktes der *Schwarz*schen Minimalfläche, so ist $\vartheta(v_1,v_2,v_3)=0$ für

$$u_1=x-\omega',\ u_2=y-\omega',\ u_3=z+\omega'.$$

Die Relationen zwischen u_1,u_2,u_3 und v_1,v_2,v_3 nehmen nun zufolge der im § 3 für die Perioden $2\omega_{a1}$, $2\omega_{a2}$, $2\omega_{a3}$ gefundenen Werte die Gestalt an:

$$\begin{aligned} u_1&=-2\omega\, v_1+2\omega\, v_2+2\omega\, v_3,\\ u_2&=\ \ 2\omega\, v_1+2\omega\, v_2-2\omega\, v_3,\\ u_3&=-2\omega' v_1+2\omega' v_2-2\omega' v_3, \end{aligned}$$

aus denen umgekehrt

$$v_1=\frac{u_2}{4\omega}-\frac{u_3}{4\omega'},\quad v_2=\frac{u_1}{4\omega}+\frac{u_2}{4\omega},\quad v_3=\frac{u_1}{4\omega}-\frac{u_3}{4\omega'}$$

folgt. Setzt man den Quotienten der halben Perioden ω und ω' des vorher betrachteten elliptischen Integrals

$$\frac{\omega'}{\omega}=\tau,$$

wobei $\frac{\tau}{i}$ eine positive Größe ist, so wird demnach $\vartheta(v_1,v_2,v_3)=0$ für

$$\begin{aligned} v_1&=\frac{y}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\tau}{4},\\ v_2&=\frac{x}{4\omega}+\frac{y}{4\omega}-\frac{\tau}{2},\\ v_3&=\frac{x}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\tau}{4}. \end{aligned}$$

Mithin sind wir zu dem Resultat gelangt: Sind x,y,z die Koordinaten eines Punktes der *Schwarz*schen Minimalfläche, so ist

$$\vartheta\Big(\frac{y}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\tau}{4},\ \frac{x}{4\omega}+\frac{y}{4\omega}-\frac{\tau}{2},\ \frac{x}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\tau}{4}\Big)=0.$$

Umgekehrt ist auch jedes Wertsystem x,y,z, das dieser Gleichung genügt, ein Punkt dieser Fläche.

5.

Wir gehen nun zur Berechnung der Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ der Funktion $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ über. Die Gleichung des den Betrachtungen zugrunde liegenden algebraischen Gebildes sei zunächst wieder

$$t^2 = (s-a_0)(s-a_1)\cdots(s-a_7).$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}$$

werde mit (ω) bezeichnet, und es sei $(\omega)_{\alpha\beta}$ die dem Elemente $\omega_{\alpha\beta}$ adjungierte Unterdeterminante. Wird dann

$$\int_{a_0}^{a_1} H(s,t)_\alpha \, ds = \omega'_{\alpha 1},$$

$$\int_{a_0}^{a_1} H(s,t)_\alpha \, ds + \int_{a_2}^{a_3} H(s,t)_\alpha \, ds = \omega'_{\alpha 2}, \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\int_{a_0}^{a_1} H(s,t)_\alpha \, ds + \int_{a_2}^{a_3} H(s,t)_\alpha \, ds + \int_{a_4}^{a_5} H(s,t)_\alpha \, ds = \omega'_{\alpha 3}$$

gesetzt*), wobei die Integrationswege im oberen Blatte der *Riemann*schen Fläche geradlinig verlaufen sollen, so sind die Größen

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{(\omega)}\{(\omega)_{1\alpha}\,\omega'_{1\beta} + (\omega)_{2\alpha}\,\omega'_{2\beta} + (\omega)_{3\alpha}\,\omega'_{3\beta}\} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3;\ \alpha \leqq \beta)$$

die sechs Moduln der ϑ-Funktion.

Für das Gebilde $t^2 = 1 - 14s^4 + s^8$ haben wir die halben Perioden $\omega_{\alpha\beta}$ und $\omega'_{\alpha\beta}$ bereits in § 3 berechnet; sie ergeben für die Moduln der ϑ-Funktion die Werte:

$$\tau_{11} = 1 + \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2\tau}, \quad \tau_{12} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \quad \tau_{13} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau},$$

$$\tau_{22} = 1 + \tau, \quad \tau_{23} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2},$$

$$\tau_{33} = 1 + \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2\tau}.$$

---

*) *Henoch*, S. 2—3; *Weierstraß*, Bd. 3, S. 290—291; *Königsberger*, dieses Journal, Bd. 64, S. 18—19.

Der reelle Bestandteil der quadratischen Form

$$\sum_{\alpha,\beta} i\tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \qquad (\alpha,\beta=1,2,3)$$

ist gleich

$$[(n_1+n_2)^2+(n_2+n_3)^2]\frac{\tau i}{2}+\frac{(n_1+n_3)^2}{2\tau i};$$

er bleibt daher bei reellen Werten der Größen n_1, n_2, n_3, die nicht sämtlich gleich Null sind, beständig negativ. Die Bedingung für die Konvergenz der Funktion $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ ist demnach erfüllt*).

Setzt man

$$n_1\tau_{\alpha 1}+n_2\tau_{\alpha 2}+n_3\tau_{\alpha 3}=\tau_\alpha, \qquad (\alpha=1,2,3)$$

so ist**)

$$\vartheta(v_1,v_2,v_3)=\sum_{(n_1,n_2,n_3)} e^{\pi i\{n_1(2v_1+\tau_1)+n_2(2v_2+\tau_2)+n_3(2v_3+\tau_3)\}},$$

wo n_1, n_2, n_3 unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

In dem vorliegenden Falle ergibt sich nun

$$\tau_1=\frac{1}{2}\left[2n_1+n_2+n_3+(n_1+n_2)\tau-\frac{n_1+n_3}{\tau}\right],$$

$$\tau_2=\frac{1}{2}\left[n_1+2n_2+n_3+(n_1+2n_2+n_3)\tau\right],$$

$$\tau_3=\frac{1}{2}\left[n_1+n_2+2n_3+(n_2+n_3)\tau-\frac{n_1+n_3}{\tau}\right],$$

mithin

$$\sum_{\beta=1}^{3} n_\beta(2v_\beta+\tau_\beta)$$

$$=(n_2+n_3)v_1'-(n_3+n_1)\frac{v_2'}{\tau}+(n_1+n_2)v_3'+\frac{1}{2}[(n_1+n_2)^2+(n_2+n_3)^2]\tau$$

$$-\frac{(n_3+n_1)^2}{2\tau}+\frac{1}{2}[(n_2+n_3)^2+(n_3+n_1)^2+(n_1+n_2)^2],$$

wenn die neuen Variablen v_1', v_2', v_3' durch die Gleichungen

$$-v_1+v_2+v_3=v_1',$$

$$v_1-v_2+v_3=-\frac{v_2'}{\tau},$$

$$v_1+v_2-v_3=v_3'$$

eingeführt werden.

---

*) *Weierstraß*, Bd. 3, S. 121 und Bd. 4, S. 568.

**) *Weierstraß*, Bd. 4, S. 551; *Königsberger*, dieses Journal, Bd. 64, S. 19.

Es werde nun

$$n_2+n_3=2\nu_1+\varepsilon_1,\ n_3+n_1=2\nu_2+\varepsilon_2,\ n_1+n_2=2\nu_3+\varepsilon_3$$

gesetzt, wo ν_1,ν_2,ν_3 ganze Zahlen und $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ gleich 0 oder gleich 1 sein sollen, so geht

$$\sum_{\beta=1}^{3} n_\beta(2v_\beta+\tau_\beta),$$

unter Weglassung einer ganzen geraden Zahl, in die Summe

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\left[(2\nu_1+\varepsilon_1)v_1'+\frac{\tau}{2}(2\nu_1+\varepsilon_1)^2\right]-\frac{1}{\tau}\left[(2\nu_2+\varepsilon_2)v_2'+\frac{1}{2}(2\nu_2+\varepsilon_2)^2\right]$$
$$+\left[(2\nu_3+\varepsilon_3)v_3'+\frac{\tau}{2}(2\nu_3+\varepsilon_3)^2\right]$$

über. Zufolge der Relation

$$n_1+n_2+n_3=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

kann $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ nur die Werte 0 und 2 annehmen, so daß für $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ nur die vier Wertsysteme $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ zulässig sind.

Dann wird

$$\vartheta(v_1,v_2,v_3)$$
$$=\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}(-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\left\{\sum_{\nu_1=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\left[(2\nu_1+\varepsilon_1)v_1'+\frac{1}{2}\tau(2\nu_1+\varepsilon_1)^2\right]}\sum_{\nu_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left[(2\nu_2+\varepsilon_2)v_2'+\frac{1}{2}(2\nu_2+\varepsilon_2)^2\right]}\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\nu_3=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\left[(2\nu_3+\varepsilon_3)v_3'+\frac{1}{2}\tau(2\nu_3+\varepsilon_3)^2\right]}\right\},$$

oder wenn man die von *Hermite* eingeführte Bezeichnungsweise der elliptischen Thetafunktionen gebraucht*),

$$\vartheta(v_1,v_2,v_3)=\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}(-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\theta_{\varepsilon_1,0}(v_1'|2\tau)\cdot\theta_{\varepsilon_2,0}(-\frac{v_2'}{\tau}|-\frac{2}{\tau})\cdot\theta_{\varepsilon_3,0}(v_3'|2\tau).$$

Da nun

$$\theta_{0,0}(v)=\vartheta_3(v),\quad \theta_{1,0}(v)=\vartheta_2(v)$$

---

*) *Hermite*, J. de Mathématiques, 2me série, t. 3, p. 26; Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn *K. Weierstraß* bearbeitet von *H. A. Schwarz*, Zweite Ausgabe, Berlin 1893, S. 41.

ist*), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \quad & \vartheta_3(v_1'|2\tau)\,\vartheta_3\Big(-\frac{v_2'}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)\vartheta_3(v_3'|2\tau) \\ & -\vartheta_2(v_1'|2\tau)\,\vartheta_2\Big(-\frac{v_2'}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)\vartheta_3(v_3'|2\tau) \\ & -\vartheta_3(v_1'|2\tau)\,\vartheta_2\Big(-\frac{v_2'}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)\vartheta_2(v_3'|2\tau) \\ & -\vartheta_2(v_1'|2\tau)\,\vartheta_3\Big(-\frac{v_2'}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)\vartheta_2(v_3'|2\tau).\end{aligned} \tag{1.}$$

Für das betrachtete hyperelliptische Gebilde zerfällt also die Funktion $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ in ein Aggregat von ϑ-Funktionen je einer Veränderlichen.

6.

Wir transformieren jetzt die auf der rechten Seite der Gleichung (1.) vorkommenden elliptischen ϑ-Funktionen auf den gleichen Modul und zwar, um die Gleichung der Minimalfläche in jeder der drei von *Schwarz* aufgestellten Formen zu erhalten, der Reihe nach auf den Modul $2\tau, \frac{\tau}{2}$ und $\frac{\tau-1}{2}$.

Aus den Relationen**)

$$\vartheta_3\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big) = \vartheta_3(v|2\tau) + \vartheta_2(v|2\tau),$$

$$\vartheta_0\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big) = \vartheta_3(v|2\tau) - \vartheta_2(v|2\tau)$$

und

$$\vartheta_3\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big) = \sqrt{\frac{\tau}{2i}}\; e^{\frac{\pi i v^2}{2\tau}}\,\vartheta_3\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big),$$

$$\vartheta_2\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big) = \sqrt{\frac{\tau}{2i}}\; e^{\frac{\pi i v^2}{2\tau}}\,\vartheta_0\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big),$$

in denen der Quadratwurzel der positive Wert beizulegen ist, erhält man

---

*) Formeln u. Lehrs., S. 42.

**) Vgl. Formeln u. Lehrs., S. 42 u. 46.

$$\vartheta_3\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)=\sqrt{\frac{\tau}{2i}}\,e^{\frac{\pi i v^2}{2\tau}}\{\vartheta_3(v|2\tau)+\vartheta_2(v|2\tau)\},$$

$$\vartheta_2\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)=\sqrt{\frac{\tau}{2i}}\,e^{\frac{\pi i v^2}{2\tau}}\{\vartheta_3(v|2\tau)-\vartheta_2(v|2\tau)\},$$

womit sich

$$(2.)\quad \vartheta(v_1,v_2,v_3)=\sqrt{\frac{\tau}{2i}}\,e^{\frac{\pi i v_2'^2}{2\tau}}\{\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_3+\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_2+\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_3 - \vartheta_3\vartheta_3\vartheta_2-\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_3-\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_2-\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_2\}$$

ergibt. Die ϑ-Funktionen auf der rechten Seite haben sämtlich den Modul 2τ, und die Argumente der drei in jedem Gliede auftretenden Funktionen sind v_1', v_2', v_3'.

Führen wir zweitens

$$\vartheta_3(v|2\tau)=\frac{1}{2}\Big\{\vartheta_3\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big)+\vartheta_0\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big)\Big\},$$

$$\vartheta_2(v|2\tau)=\frac{1}{2}\Big\{\vartheta_3\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big)-\vartheta_0\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau}{2}\Big)\Big\}$$

und die vorher für $\vartheta_3\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)$ und $\vartheta_2\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)$ gefundenen Ausdrücke in die Formel (1.) ein, so folgt

$$(3.)\ \vartheta(v_1,v_2,v_3)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{2i}}\,e^{\frac{\pi i v_2'^2}{2\tau}}\{\vartheta_3\vartheta_0\vartheta_3-\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_3-\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_0-\vartheta_0\vartheta_0\vartheta_0\},$$

wobei $\frac{v_1'}{2}, \frac{v_2'}{2}, \frac{v_3'}{2}$ die Argumente der drei ϑ-Funktionen jedes Gliedes sind und der Modul gleich $\frac{\tau}{2}$ ist.

Drittens erhalten wir mittels der Relationen

$$\vartheta_2\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)=-\frac{i}{2}\sqrt{\tau}\,e^{\frac{\pi i v^2}{2\tau}}\Big\{\vartheta_3\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau-1}{2}\Big)+i\vartheta_0\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau-1}{2}\Big)\Big\},$$

$$\vartheta_3\Big(-\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{2}{\tau}\Big)=\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\,e^{\frac{\pi i v^2}{2\tau}}\Big\{\vartheta_3\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau-1}{2}\Big)-i\vartheta_0\Big(\frac{v}{2}\Big|\frac{\tau-1}{2}\Big)\Big\},$$

in denen die Quadratwurzel $\sqrt{\tau}$ so bestimmt werden muß, daß ihr reeller Bestandteil positiv ist, aus der Gleichung (1.)

$$(4.)\qquad \vartheta(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\,e^{\frac{\pi i v_2'^2}{2\tau}}\Big\{\vartheta_0\Big(\frac{v_1'}{2}\Big)\vartheta_3\Big(\frac{v_2'}{2}\Big)\vartheta_0\Big(\frac{v_3'}{2}\Big) - i\vartheta_3\Big(\frac{v_1'}{2}\Big)\vartheta_0\Big(\frac{v_2'}{2}\Big)\vartheta_3\Big(\frac{v_3'}{2}\Big)\Big\},$$

wo der Modul der elliptischen ϑ-Funktionen den Wert $\frac{\tau-1}{2}$ hat.

7.

Zum Schlusse des § 4 ergab sich

$$\vartheta(v_1,v_2,v_3)=0$$

als Gleichung der *Schwarz*schen Minimalfläche, wenn

$$v_1=\frac{y}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\tau}{4},\quad v_2=\frac{x}{4\omega}+\frac{y}{4\omega}-\frac{\tau}{2},\quad v_3=\frac{x}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\tau}{4},$$

mithin zufolge der Relationen zwischen den Argumenten v_1,v_2,v_3 und v_1',v_2',v_3'

$$v_1'=\frac{x}{2\omega}-\frac{\tau}{2},\quad v_2'=\frac{z}{2\omega}+\frac{\tau}{2},\quad v_3'=\frac{y}{2\omega}-\frac{\tau}{2}$$

gesetzt wird. Berücksichtigt man nun die Formeln*)

$$\vartheta_2\Big(v+\frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\Big)=e^{-v\pi i}\,\vartheta_3\Big(v-\frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\Big),$$

$$\vartheta_3\Big(v+\frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\Big)=e^{-v\pi i}\,\vartheta_2\Big(v-\frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\Big),$$

so erhält man aus dem für $\vartheta(v_1,v_2,v_3)$ gefundenen Ausdrucke (2.)

$$\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_3+\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_3+\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_3+\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_2$$
$$-\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_2-\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_2-\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_3-\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_2=0$$

als Gleichung der Fläche, wobei in jedem Gliede

$$\frac{x}{2\omega}-\frac{\tau}{2},\quad \frac{y}{2\omega}-\frac{\tau}{2},\quad \frac{z}{2\omega}-\frac{\tau}{2}$$

die Argumente der drei ϑ-Funktionen sind, während der Modul überall den Wert 2τ hat. Setzt man demnach

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\Big(\frac{u}{2\omega}-\frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\Big)=\varphi(u),$$

so nimmt die Gleichung die Form

---

*) Vgl. Formeln u. Lehrs., S. 45.

$$1+(\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z))-(\varphi(y)\varphi(z)+\varphi(z)\varphi(x)+\varphi(x)\varphi(y))$$
$$-\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)=0$$

an, die mit der von *Schwarz* ursprünglich für die Fläche gefundenen übereinstimmt*).

Bei *Schwarz* wird nämlich die Funktion $\varphi(u)$ durch die Gleichung**)

$$u=\int_1^{\varphi(u)}\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-14t^2+t^4)}}$$

definiert, aus der sich

$$\frac{u-\omega'}{2a^2}=\int_1^{\frac{1}{a^2}\varphi(u)}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-a^8\xi^2)}}$$

ergibt. Ist nun

$$u\sqrt{e_1-e_3}=\int_1^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

so erhält man***)

$$\xi=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(u\,\middle|\,\frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}},\ \frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}}\right),$$

wenn

$$\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2\xi^2}}=K,\quad \int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-(1-k^2)\xi^2}}=K'$$

gesetzt wird. Unter Anwendung der Relation

$$\sigma_\lambda(u\,|\,\omega,\omega')=\sigma_\lambda\left(\frac{u}{m}\,\middle|\,\frac{\omega}{m},\frac{\omega'}{m}\right)\qquad(\lambda=1,2,3)$$

folgt daher für $k=a^4$

$$\varphi(u)=a^2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{u-\omega'}{2}\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\omega'\right)$$

oder beim Übergang zu den ϑ-Funktionen

$$\varphi(u)=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\left(\frac{u}{2\omega}-\frac{\tau}{2}\,\middle|\,2\tau\right),$$

wie vorher auf anderem Wege gefunden wurde.

---

*) *Schwarz*, Bd. 1, S. 73.
**) *Schwarz*, Bd. 1, S. 69.
***) Formeln u. Lehrs., S. 29 u. 31.

8.

Nach den Formeln, die für die elliptischen ϑ-Funktionen bei Vermehrung des Arguments um die Hälfte des Moduls bestehen*), ist

$$\vartheta_0\left(v-\frac{\tau}{4}\,|\,\frac{\tau}{2}\right)=-i\,h^{-\frac{1}{8}}\,e^{v\pi i}\;\;\vartheta_1\left(v\,|\,\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\vartheta_3\left(v-\frac{\tau}{4}\,|\,\frac{\tau}{2}\right)=\;\;\;h^{-\frac{1}{8}}\,e^{v\pi i}\;\;\vartheta_2\left(v\,|\,\frac{\tau}{2}\right)$$

und

$$\vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{4}\,|\,\frac{\tau}{2}\right)=\;\;i\,h^{-\frac{1}{8}}\,e^{-v\pi i}\,\vartheta_1\left(v\,|\,\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{4}\,|\,\frac{\tau}{2}\right)=\;\;\;h^{-\frac{1}{8}}\,e^{-v\pi i}\,\vartheta_2\left(v\,|\,\frac{\tau}{2}\right),$$

wo

$$h=e^{\tau\pi i}.$$

Formt man hiermit den Ausdruck (3.) von $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ um, so erhält man als Gleichung der Fläche

$$\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_1+\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_2+\vartheta_2\vartheta_1\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_1\vartheta_1=0,$$

wenn $\frac{x}{4\omega}$, $\frac{y}{4\omega}$, $\frac{z}{4\omega}$ die Argumente der drei in jedem Gliede auftretenden ϑ-Funktionen sind und der Modul gleich $\frac{\tau}{2}$ ist. Setzt man daher

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}\,|\,\frac{\tau}{2}\right)=\lambda(u),$$

so geht die Gleichung in die folgende:

$$\lambda(x)\,\lambda(y)+\lambda(y)\,\lambda(z)+\lambda(z)\,\lambda(x)+1=0$$

über**).

Für die Funktion $\lambda(u)$ findet *Schwarz* die Gleichung***)

$$u=\int_{\lambda(u)}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{3}{4}\lambda^4+\frac{5}{2}\lambda^2+\frac{3}{4}}}$$

mit der Nebenbedingung, daß $\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{\frac{3}{4}\lambda^4+\frac{5}{2}\lambda^2+\frac{3}{4}}$ für $\lambda=\infty$ einen positiven Wert hat. Hieraus ergibt sich aber in Übereinstimmung mit der vorher für $\lambda(u)$ aufgestellten Definitionsgleichung:

---

*) Vgl. Formeln u. Lehrs., S. 45.

**) *Schwarz*, Bd. 1, S. 75 u. 89.

***) *Schwarz*, Bd. 1, S. 74.

$$\lambda(u)=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_1}{\sigma}\left(\frac{u}{2}\middle|\omega,\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}\middle|\frac{\tau}{2}\right).$$

9.

Wendet man die Relationen*)

$$\vartheta_0\left(v-\frac{\tau}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)=ie^{-\frac{\pi i}{8}}h^{-\frac{1}{8}}e^{v\pi i}\vartheta_2\left(v+\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right),$$

$$\vartheta_3\left(v-\frac{\tau}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)=e^{-\frac{\pi i}{8}}h^{-\frac{1}{8}}e^{v\pi i}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)$$

und

$$\vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)=ie^{-\frac{\pi i}{8}}h^{-\frac{1}{8}}e^{-v\pi i}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right),$$

$$\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)=e^{-\frac{\pi i}{8}}h^{-\frac{1}{8}}e^{-v\pi i}\vartheta_2\left(v+\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)$$

auf den Ausdruck (4.) von $\vartheta(v_1,v_2,v_3)$ an, so folgt

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{y}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)-\vartheta_1\left(\frac{x}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_1\left(\frac{y}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_1\left(\frac{z}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)=0$$

als Gleichung der Fläche. Der Modul der ϑ-Funktionen ist jetzt gleich $\frac{1}{2}(\tau-1)$; setzt man daher

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}+\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right)=\lambda_1(u),$$

so erhält man

$$\lambda_1(x)\cdot\lambda_1(y)\cdot\lambda_1(z)=1.$$

Diese einfache Form der Gleichung der Minimalfläche leitet *Schwarz* aus der des vorhergehenden Paragraphen ab, indem er die Funktion $\lambda_1(u)$ durch die Substitution**)

---

*) Vgl. Formeln u. Lehrs., S. 44 u. 45.

**) *Schwarz*, Fortgesetzte Untersuchungen über spezielle Minimalflächen, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1, S. 137.

$$\lambda_1(u) = \frac{\lambda(u)-1}{\lambda(u)+1}$$

einführt. In der Tat folgt mit Hilfe der Relation*)

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(v+\frac{1}{4}\middle|\tau\right) = \frac{\vartheta_2\left(v\middle|\tau+\frac{1}{2}\right)-\vartheta_1\left(v\middle|\tau+\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_2\left(v\middle|\tau+\frac{1}{2}\right)+\vartheta_1\left(v\middle|\tau+\frac{1}{2}\right)},$$

daß

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}+\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}(\tau-1)\right) = \frac{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}\middle|\frac{\tau}{2}\right)-1}{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}\middle|\frac{\tau}{2}\right)+1}$$

ist, daß also zwischen $\lambda(u)$ und $\lambda_1(u)$ die obige Gleichung besteht.

Die Definition von $\lambda(u)$ als inverse Funktion eines elliptischen Integrals führt für $\lambda_1(u)$ auf die Gleichung

$$u = \int_{\lambda_1(u)}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

mit der Nebenbedingung, daß $\sqrt{t^4+t^2+1} = +\sqrt{3}$ für $t=1$ ist.

10.

Aus jeder der in den §§ 7 bis 9 gefundenen Gleichungen der *Schwarz*schen Minimalfläche lassen sich ihre geometrischen Eigenschaften herleiten. Die Periodizität der Thetafunktionen zeigt unmittelbar, daß sich der Raum durch drei Systeme äquidistanter Ebenen so in Würfel von der Kantenlänge 4ω zerlegen läßt, daß je zwei Würfel kongruente Stücke der Minimalfläche enthalten**).

Auf einem solchen Flächenstück liegen sechs von vier Strecken der Länge $2\omega\sqrt{2}$ gebildete räumliche Vierseite, bei denen die Winkel zwischen je zwei zusammenstoßenden Strecken gleich 60^0 sind. Dasjenige Vierseit z. B., dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$(0,0,0),\ (2\omega,0,-2\omega),\ (2\omega,2\omega,0),\ (0,2\omega,-2\omega)$$

*) Vgl. Formeln und Lehrs., S. 42 u. 66.

**) *Schwarz*, Bd. 1, S. 5; *Weierstraß*, Bd. 3, S. 242.

$$\lambda(u) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1}{\sigma}\left(\frac{u}{2} \middle| \omega, \frac{\omega'}{2}\right)$$
$$= \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega} \middle| \frac{\tau}{2}\right).$$

9.

Wendet man die Relationen*)

$$\vartheta_0\left(v-\frac{\tau}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right) = i e^{-\frac{\pi i}{8}} h^{-\frac{1}{8}} e^{v\pi i}\, \vartheta_2\left(v+\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right),$$

$$\vartheta_3\left(v-\frac{\tau}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right) = e^{-\frac{\pi i}{8}} h^{-\frac{1}{8}} e^{v\pi i}\, \vartheta_1\left(v+\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right)$$

und

$$\vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right) = i e^{-\frac{\pi i}{8}} h^{-\frac{1}{8}} e^{-v\pi i}\, \vartheta_1\left(v+\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right),$$

$$\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right) = e^{-\frac{\pi i}{8}} h^{-\frac{1}{8}} e^{-v\pi i}\, \vartheta_2\left(v+\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right)$$

auf den Ausdruck (4.) von $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ an, so folgt

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{y}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z}{4\omega}+\frac{1}{4}\right) - \vartheta_1\left(\frac{x}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_1\left(\frac{y}{4\omega}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_1\left(\frac{z}{4\omega}+\frac{1}{4}\right) = 0$$

als Gleichung der Fläche. Der Modul der ϑ-Funktionen ist jetzt gleich $\frac{1}{2}(\tau-1)$; setzt man daher

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}+\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}(\tau-1)\right) = \lambda_1(u),$$

so erhält man

$$\lambda_1(x)\cdot\lambda_1(y)\cdot\lambda_1(z) = 1.$$

Diese einfache Form der Gleichung der Minimalfläche leitet *Schwarz* aus der des vorhergehenden Paragraphen ab, indem er die Funktion $\lambda_1(u)$ durch die Substitution**)

---

*) Vgl. Formeln u. Lehrs., S. 44 u. 45.

**) *Schwarz*, Fortgesetzte Untersuchungen über spezielle Minimalflächen, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1, S. 137.

$$\lambda_1(u) = \frac{\lambda(u)-1}{\lambda(u)+1}$$

einführt. In der Tat folgt mit Hilfe der Relation*)

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(v+\frac{1}{4}|\tau\right) = \frac{\vartheta_2\left(v|\tau+\frac{1}{2}\right)-\vartheta_1\left(v|\tau+\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_2\left(v|\tau+\frac{1}{2}\right)+\vartheta_1\left(v|\tau+\frac{1}{2}\right)},$$

daß

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}+\frac{1}{4}|\frac{1}{2}(\tau-1)\right) = \frac{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}|\frac{\tau}{2}\right)-1}{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\left(\frac{u}{4\omega}|\frac{\tau}{2}\right)+1}$$

ist, daß also zwischen $\lambda(u)$ und $\lambda_1(u)$ die obige Gleichung besteht.

Die Definition von $\lambda(u)$ als inverse Funktion eines elliptischen Integrals führt für $\lambda_1(u)$ auf die Gleichung

$$u = \int_{\lambda_1(u)}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

mit der Nebenbedingung, daß $\sqrt{t^4+t^2+1} = +\sqrt{3}$ für $t=1$ ist.

10.

Aus jeder der in den §§ 7 bis 9 gefundenen Gleichungen der *Schwarz*schen Minimalfläche lassen sich ihre geometrischen Eigenschaften herleiten. Die Periodizität der Thetafunktionen zeigt unmittelbar, daß sich der Raum durch drei Systeme äquidistanter Ebenen so in Würfel von der Kantenlänge 4ω zerlegen läßt, daß je zwei Würfel kongruente Stücke der Minimalfläche enthalten**).

Auf einem solchen Flächenstück liegen sechs von vier Strecken der Länge $2\omega\sqrt{2}$ gebildete räumliche Vierseite, bei denen die Winkel zwischen je zwei zusammenstoßenden Strecken gleich 60^0 sind. Dasjenige Vierseit z. B., dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$(0,0,0),\ (2\omega,0,-2\omega),\ (2\omega,2\omega,0),\ (0,2\omega,-2\omega)$$

*) Vgl. Formeln und Lehrs., S. 42 u. 66.

**) *Schwarz*, Bd. 1, S. 5; *Weierstraß*, Bd. 3, S. 242.

haben, wird von den Geraden

$$x=0,\ y+z=0;\quad y=0,\ z+x=0;\quad x=2\omega,\ y-z=2\omega;\quad y=2\omega,\ x-z=2\omega$$

gebildet*).

Die sämtlichen reellen Geraden der Fläche gehen aus zwölf von ihnen:

$$\begin{array}{llllll} x=0, & y+z=0; & y=0, & z+x=0; & z=0, & x+y=0; \\ x=\omega, & y=-\omega; & y=\omega, & z=-\omega; & z=\omega, & x=-\omega; \\ x=\omega, & z=-\omega; & y=\omega, & x=-\omega; & z=\omega, & y=-\omega; \\ x=2\omega, & y-z=2\omega; & y=2\omega, & z-x=2\omega; & z=2\omega, & x-y=2\omega \end{array}$$

durch parallele Verschiebung hervor, wenn man in den Gleichungen die Koordinaten x, y, z unabhängig voneinander um positive oder negative ganzzahlige Vielfache von 4ω vermehrt**). Die drei ersten der angeführten Geraden liegen in der Tangentialebene der Fläche im Koordinatenanfangspunkt:

$$x+y+z=0.$$

Auf die nicht reellen Geraden der Fläche soll hier nicht eingegangen werden.

---

*) Vgl. *Thomae*, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen (Leipzig 1905), S. 40—41.

**) Vgl. *Schwarz*, Bd. 1, S. 47, 79, 80.

Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Hamburg.

Im folgenden will ich die hauptsächlichsten Definitionen und Begriffe aus der Theorie der Kurvenscharen (Divisorenklassen) auf algebraischen Flächen kurz darstellen. Der Zweck ist der, eine Vergleichung der von den Herren *G. Castelnuovo* und *F. Enriques* benutzten Bezeichnungen*) mit meinen zu erleichtern. Es wird dabei, wie ich denke, deutlich hervortreten, daß meine Definitionen z. B. der zu einer Kurvenschar adjungierten Funktionen, dann des virtuellen Geschlechts bedeutend einfacher sind als die der italienischen Mathematiker. Auch gelten meine Definitionen ganz unabhängig davon, ob die betreffende Divisorenklasse ganze Divisoren enthält oder nicht, ob sie also eine eigentliche Kurvenschar definiert oder nicht. Auch habe ich nicht nötig, birationale Transformationen zu Hilfe zu nehmen. Dem Zweck der Arbeit entsprechend lasse ich die Beweise im allgemeinen fort. Ich verweise deswegen auf meine Arbeit „Der *Riemann-Roch*sche Satz für algebraische Funktionen zweier Veränderlichen.“**) Zum Schluß leite ich einige Sätze mit meinen Methoden ab, um deren Anwendung zu erläutern. Ich bediene mich, um den Vergleich mit den Arbeiten von *G. Castelnuovo* und *F. Enriques* zu erleichtern, soweit es geht,

*) Vgl. hierzu *G. Castelnuovo* et *F. Enriques*, Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. Math. Ann. Bd. 48. — *G. Castelnuovo* e *F. Enriques*, Sopra alcune questioni fundamentali nella teoria delle superficie algebriche. Annali di Mat. (3) Bd. 6. (1901).

**) Jahresber. d. D. Math.-Ver. Bd. 18. (1909) S. 267.

der geometrischen Sprache, bemerke aber, daß alle vorkommenden Größen sich auch bei den kompliziertesten Singularitäten analytisch scharf definieren lassen.

Primteiler. Es sei durch $F(x,y,z)=0$ eine algebraische Fläche F oder ein algebraischer Körper (x,y,z) definiert. Jeder algebraischen Kurve $\mathfrak{A}$ auf F ordnen wir einen Primteiler $\mathfrak{A}$ zu, indem wir sagen, eine ganze Funktion $G(x,y,z)$ ist durch $\mathfrak{A}^\alpha$ teilbar, wenn die Fläche $G=0$ durch die Kurve $\mathfrak{A}$ α-mal hindurchgeht. Ist R eine beliebige rationale Funktion von x,y,z, so sagen wir, wenn der Zähler von R durch $\mathfrak{A}^\alpha$ und der Nenner durch $\mathfrak{A}^\beta$ teilbar ist, R ist teilbar durch $\mathfrak{A}^{\alpha-\beta}$. Auch den Kurven, für die eine der Größen x,y oder z unendlich wird, werden Primteiler zugeordnet. Da eine rationale Funktion von x,y,z nur längs einer endlichen Anzahl von Kurven der Fläche F Null und unendlich werden kann, so läßt sich jede Funktion darstellen als ein Produkt einer endlichen Zahl von Primteilern, indem in das Produkt jeder Primteiler so oft aufgenommen wird, wie er in der Funktion enthalten ist.

Divisoren. Divisorenklassen. Ein Produkt von Primteilern heißt ein Divisor. Ein Divisor wird *ganz* genannt, wenn keine negativen Potenzen von Primteilern in ihm vorkommen. Die Divisoren werden in der Weise in Klassen eingeteilt, daß man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnet, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers entspricht. Jede Klasse ist durch einen der in ihr enthaltenen Divisoren eindeutig bestimmt. Divisoren derselben Klasse heißen äquivalent, in Zeichen $\backsim$. Ist $\mathfrak{Q}$ ein Divisor, so wird die durch ihn definierte Klasse mit $(\mathfrak{Q})$ bezeichnet.

Unter den Klassen sind zwei von besonderer Bedeutung. Das ist erstens diejenige, die alle Divisoren enthält, die den Funktionen des Körpers entsprechen. Diese Klasse heißt *Hauptklasse.* In ihr sind unter anderm auch die Konstanten enthalten, also auch die Zahl 1. Sagt man daher, ein Divisor ist äquivalent 1, so heißt das nichts anderes als, er gehört der Hauptklasse an oder er stellt eine Funktion des Körpers dar. Die zweite besonders wichtige Klasse wird in folgender Weise definiert. Das Doppeldifferential $dxdy$ wird längs gewisser Kurven der Fläche F Null und unendlich. Es gibt also einen bestimmten Divisor $\mathfrak{R}$ von der Art, daß $\frac{dxdy}{\mathfrak{R}}$ nirgends Null oder unendlich wird. Dieser Divisor $\mathfrak{R}$ soll

kanonischer Divisor heißen. Er hängt ab von der Wahl von x und y. Die durch den Divisor $\mathfrak{K}$ definierte Klasse $(\mathfrak{K})$ heißt die *Differentialklasse* oder die *kanonische Klasse.* Diese Klasse ist nicht ganz unabhängig von der Wahl der Größen x, y. Ist $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor dieser Klasse, so ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}} = R$ eine Funktion des Körpers (x, y, z), und es wird zufolge der Definition von $\mathfrak{K}$ das Differential $R dx dy$ nirgends unendlich, ist also ein Differential erster Gattung. Es entsprechen also die ganzen Divisoren der kanonischen Klasse denjenigen Kurven, in denen F von den speziellen Φ-Flächen (den adjungierten Flächen) außer den mehrfachen Kurven geschnitten wird.

Die Dimension einer Klasse. Jedem ganzen Divisor einer Klasse entspricht eine Kurve auf der Fläche F. Diese Kurve kann natürlich unter Umständen zerfallen oder auch mehrfach zu zählende Kurven enthalten. Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_r$ ganze Divisoren einer Klasse. Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor derselben Klasse, so entsprechen den Divisoren

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{Q}}, \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{Q}}, \cdots \frac{\mathfrak{G}_r}{\mathfrak{Q}}$$

Funktionen des Körpers (x, y, z). Besteht zwischen diesen Funktionen keine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten, so nennen wir die Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_r$ linear unabhängig. Die Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren einer Klasse heißt ihre Dimension. Wir bezeichnen sie mit $\{\mathfrak{Q}\}$. Es ist also z. B. $\{\mathfrak{K}\}$ gleich der Anzahl der linear unabhängigen Doppeldifferentiale erster Gattung, also gleich dem geometrischen Geschlecht p_g der Fläche. Es sei etwa $\{\mathfrak{Q}\} = r$, und es seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots . \mathfrak{G}_r$ linear unabhängig. Jede Funktion von der Form

$$(1.) \qquad c_1 \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{Q}} + c_2 \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{Q}} + \cdots + c_r \frac{\mathfrak{G}_r}{\mathfrak{Q}}$$

ist dann wieder von der Form $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}}$, wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist, und auch jede Funktion, die von der Form $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}}$ ist, wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor, muß sich in der Form (1.) darstellen lassen. Indem wir den Divisor $\mathfrak{Q}$ als unwesentlich fortlassen, können wir demnach sagen, alle ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{Q})$ lassen sich in der Form darstellen:

$$(2.) \qquad \mathfrak{G} = c_1 \mathfrak{G}_1 + c_2 \mathfrak{G}_2 + \cdots + c_r \mathfrak{G}_r .$$

Da jeder ganze Divisor eine Kurve auf der Fläche F bedeutet, so stellt uns die Gesamtheit der ganzen Divisoren einer Klasse eine lineare Kurvenschar dar. Die Dimension dieser Schar ist $r-1$, wenn die Klasse von der Dimension r ist. Die Schar (2.) stellt eine Schar ohne Basispunkte dar; oder genauer ohne vorgeschriebene Basispunkte. Denn es kann in besonderen Fällen eintreten, daß die durch (2.) dargestellten Kurven gemeinsame Punkte haben, auch ohne daß sie besonders vorgeschrieben sind. Will man Kurvenscharen untersuchen, denen Basispunkte und ihr Verhalten in diesen vorgeschrieben sind, so kann man so verfahren, wie ich es in meiner Arbeit „Kurvenscharen in einer Ebene“*) getan habe.

Die Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler, also eine algebraische Kurve auf der Fläche F. Beschränken wir uns auf die Punkte der Kurve $\mathfrak{A}$, so haben wir einen algebraischen Körper *einer* Veränderlichen. Jeder Stelle eines solchen oder jedem Punkte der Kurve $\mathfrak{A}$ wird ein Primteiler zugeordnet; diese sollen, zum Unterschiede von den den Kurven der Fläche F zugeordneten Primteilern, *Primteiler zweiter Stufe* heißen. Wir bezeichnen diese immer mit kleinen deutschen Buchstaben und ebenso die aus ihnen zusammengesetzten Divisoren, während die anderen Primteiler, die einer Kurve von F entsprechen, immer mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet werden sollen. Dabei sind in einem mehrfachen Punkte von $\mathfrak{A}$ die auf verschiedenen Zweigen von $\mathfrak{A}$ liegenden Punkte als verschieden zu rechnen. Ist $\mathfrak{B}$ ein zweiter Primteiler oder eine Kurve auf F, so können $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Schnittpunkte haben. Jedem Schnittpunkt entspricht ein Primteiler zweiter Stufe der Kurve $\mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{b}$ das Produkt aller der Primteiler, die den Schnittpunkten von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ entsprechen. Dabei ist ein Primteiler in $\mathfrak{b}$ in der h-ten Potenz aufzunehmen, wenn an der betreffenden Stelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ h zusammenfallende Schnittpunkte haben. Wir drücken dies kurz so aus, daß wir sagen, für $\mathfrak{A}=0$ geht $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$ über. Diese Ausdrucksweise hat den großen Vorteil, daß sie sofort auf beliebige Divisoren ausgedehnt werden kann. Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor, so geht jeder in ihm enthaltene Primteiler für $\mathfrak{A}=0$ in einen bestimmten Divisor zweiter Stufe über, und damit geht auch $\mathfrak{Q}$ in einen ganz bestimmten Divisor $\mathfrak{q}$ über. Die Anzahl der in $\mathfrak{q}$ enthaltenen

*) Dieses Journal, Bd. 134, S. 167.

Primteiler, jeder so oft gerechnet, wie sein Exponent angibt, heißt die Ordnung von $\mathfrak{q}$. Wir bezeichnen sie mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Q})$. Es bedeutet also $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Ordnung des Divisors $\mathfrak{b}$, in den $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{A}=0$ übergeht. Es ist also $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nichts anderes als die Zahl der Schnittpunkte der beiden Kurven $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Es ist daher

$$(3.) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}).$$

Für das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Q})$ gelten der Definition nach die Rechenregeln

$$(4.) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_1) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_2), \\ \left(\mathfrak{A}, \dfrac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}\right) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_1) - (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_2). \end{cases}$$

Lassen wir diese Regeln allgemein gelten und ebenso die Formel (3.), so ist damit das Symbol $(\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'')$ definiert für beliebige teilerfremde Divisoren $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$. Denn zufolge der Formeln (3.) und (4.) wird der Wert von $(\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'')$ zurückgeführt auf den Fall, wo $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ Primteiler sind.

Sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei ganze Divisoren und ist $\mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{G}_2$, ist also

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2}$$

eine rationale Funktion von (x, y, z), so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}_1)$ die Zahl der Nullstellen und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}_2)$ die Zahl der Unendlichkeitsstellen von $\mathfrak{R}$ im Körper $\mathfrak{A}$. Aber nach einem bekannten Satze sind diese beiden Zahlen einander gleich. Es ist also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}_1) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}_2) \quad \text{oder} \quad \left(\mathfrak{A}, \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2}\right) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = 0.$$

Es ist also immer $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}) = 0$, wenn $\mathfrak{Q} \sim 1$. Und daraus schließen wir wieder, es ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_1) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}_2)$, wenn $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$. Unter Benutzung der Rechenregeln (3.) und (4.) folgt dann noch allgemeiner:

Satz 1. Das Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ *ändert sich nicht, wenn man* $\mathfrak{Q}_1$ *und* $\mathfrak{Q}_2$ *durch ihnen äquivalente Divisoren ersetzt. Ist im besondern* $\mathfrak{Q}_2 \sim 1$, *so ist* $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_1, 1) = 0$.

Wir können jetzt noch einen Schritt weiter gehen und $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ auch für den Fall definieren, daß $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ nicht teilerfremd sind. Lassen wir auch für diesen Fall die Rechenregeln (3.) und (4.) gelten, so genügt es, für einen Primteiler $\mathfrak{A}$ den Wert von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ zu definieren. Es sei $\mathfrak{R}$ irgendeine Funktion des Körpers (x, y, z), die durch $\mathfrak{A}$ teilbar ist. Es sei

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A}^{\alpha}\mathfrak{Q},$$

wo $\mathfrak{Q}$ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd ist. Wäre $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{R}$ teilerfremd, so würde $(\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = 0$. Wir wenden diesen Satz für unser $\mathfrak{R}$ rein formal an zur Definition von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$. Also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\alpha}\mathfrak{Q}) = \alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}) = 0.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen mit Benutzung des Satzes 1., daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Funktion $\mathfrak{R}$ ist. Damit ist dann auch gezeigt, daß Satz 1. richtig bleibt, auch wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ nicht teilerfremd sind.

Der Grad einer Klasse. Hiermit haben wir die Mittel, um ganz allgemein den Grad einer Klasse zu definieren. Man versteht unter dem Grad einer Kurvenschar ohne Basispunkte — und auf solche beschränken wir uns hier — die Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven der Schar. Sind also in einer Klasse zwei ganze Divisoren $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ enthalten, so ist $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ als Grad der Klasse zu definieren. Da wir nach Satz 1. für $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ schreiben dürfen $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$, wenn $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor der betrachteten Klasse ist, so liegt es nahe, den Grad einer Klasse in folgender Weise zu definieren:

Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor einer Klasse, so heißt $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$ der Grad der Klasse.

Diese Definition ist nach Satz 1. unabhängig von der Wahl des Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Klasse, und sie gilt für beliebige Klassen, gleichgültig ob sie ganze Divisoren enthalten oder nicht.

Produkte und Quotienten von Klassen. Ergänzungsklassen. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ irgend zwei Divisoren, so heißt die Klasse, die durch $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$ definiert wird, das Produkt der Klassen $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$, und die durch $\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$ definierte Klasse der Quotient der Klassen $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$. Man sieht leicht, daß diese Definition ihre Berechtigung hat, daß nämlich die Klassen $(\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2)$ und $\left(\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}\right)$ unabhängig sind von der Wahl der Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ innerhalb ihrer Klasse. Die italienischen Mathematiker bezeichnen das Produkt zweier Klassen $(\mathfrak{Q}_1), (\mathfrak{Q}_2)$ mit $(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2)$ und ihren Quotienten mit $(\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_2)$. Mir scheint die von mir nach dem Vorgange von Herrn *Hensel* angewandte Bezeichnung angemessener zu sein. Auch braucht bei der hier gegebenen Definition nicht darauf Rücksicht genommen zu werden, ob

das Produkt oder der Quotient zweier Klassen ganze Divisoren enthalten oder nicht.

Ist das Produkt zweier Klassen $(\mathfrak{D}_1)$ und $(\mathfrak{D}_2)$ im besonderen gleich der kanonischen Klasse, so heißen die Klassen *Ergänzungsklassen.* Stehen zwei Divisoren $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ in der Beziehung zueinander, daß $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{K}$ gleich dem kanonischen Divisor ist, so sollen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ *Ergänzungsdivisoren* heißen. Enthalten zwei Ergänzungsklassen $(\mathfrak{D}_1)$ und $(\mathfrak{D}_2)$ ganze Divisoren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, so ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ ein ganzer Divisor der kanonischen Klasse, d. h. geometrisch, es gibt eine spezielle Φ-Fläche, die durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ hindurchgeht. Genauer können wir sagen: Ist die Dimension der Ergänzungsklasse $\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}_1}\right)$ von $(\mathfrak{A}_1)$ gleich r, so gibt es r linear unabhängige spezielle Φ-Flächen, die durch $\mathfrak{A}_1$ hindurchgehen. Solche Kurven $\mathfrak{A}_1$ nennt man *spezielle Kurven,* und ebenso heißt die Klasse $(\mathfrak{A}_1)$ speziell. Die Zahl $r = \left\{\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}_1}\right\}$ heißt der *Index der Spezialität.* Ist dagegen $\left\{\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}_1}\right\} = 0$, so gibt es keine spezielle Φ-Fläche, die durch $\mathfrak{A}_1$ geht, und die Kurve $\mathfrak{A}_1$ und Klasse $(\mathfrak{A}_1)$ heißen *nicht-speziell.*

Ergänzungsklassen in bezug auf einen Primteiler. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler, also eine Kurve der Fläche F. Wie wir schon gesehen haben, wird jedem Punkte der Kurve $\mathfrak{A}$ ein Primteiler zweiter Stufe zugeordnet. Produkte von solchen Primteilern heißen auch Divisoren. Die Divisoren werden auch in Klassen eingeteilt, indem man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnet, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers $\mathfrak{A}$ entspricht. Unter den Divisoren sind zwei besonders bemerkenswert. Das ist einmal ein Divisor, der in ganz bestimmter Weise aus den Primteilern zusammengesetzt ist, die den mehrfachen Punkten von $\mathfrak{A}$ entsprechen. Dabei rechnet aber z. B. ein Punkt P nicht zu den mehrfachen Punkten von $\mathfrak{A}$, wenn er auf einer mehrfachen Kurve $\mathfrak{C}$ von F liegt und die Zweige von $\mathfrak{A}$, die durch ihn hindurchgehen, in *verschiedenen* der Flächenstücke von F liegen, die durch $\mathfrak{C}$ hindurchgehen. Dieser Divisor wird *Doppelpunktdivisor* genannt. Wir wollen ihn mit $\mathfrak{d}$ bezeichnen. Der zweite Divisor von Bedeutung ist folgendermaßen definiert: Ist ξ irgendeine Größe des Körpers $\mathfrak{A}$, so wird $d\xi$ an bestimmten Stellen Null und unendlich. Es gibt einen bestimmten Divisor $\mathfrak{w}_\xi$ von der Art, daß $\frac{d\xi}{\mathfrak{w}_\xi}$ weder Null noch unendlich wird. Dieser Divisor $\mathfrak{w}_\xi$ hängt zwar

von der Wahl von ξ ab, aber es besteht der wichtige Satz, daß die durch $\mathfrak{w}_\xi$ definierte Klasse $(\mathfrak{w}_\xi)$ von ξ unabhängig ist, so daß wir sie einfach mit $(\mathfrak{w})$ bezeichnen können. Diese Klasse heißt auch hier *Differentialklasse* oder *kanonische Klasse.* Ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der kanonischen Klasse, so ist $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{w}_\xi}$ eine Funktion des Körpers $\mathfrak{A}$ und das Differential $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{w}_\xi} d\xi$ kann nirgends unendlich werden, ist also von der ersten Gattung. Zwei Divisoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$, die in der Beziehung zueinander stehen, daß $(\mathfrak{q}\mathfrak{q}') = (\mathfrak{w})$, daß also das Produkt ihrer Klassen gleich der kanonischen Klasse ist, heißen auch hier Ergänzungsklassen. Sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ beides ganze Divisoren, so ist $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{w})$, so daß $\frac{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}{\mathfrak{w}_\xi} d\xi$ ein Differential erster Gattung von $\mathfrak{A}$ ist. Es werden also die Stellen der Kurve $\mathfrak{A}$, die den Primteilern von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ entsprechen, zusammen von einer speziellen φ-Kurve von $\mathfrak{A}$ ausgeschnitten, wobei die Doppelpunkte, durch die ja jede φ-Kurve hindurchgeht, nicht mitgezählt sind.

Wir haben gesehen, daß jeder Divisor erster Stufe, der also aus Kurven von F zusammengesetzt ist, für $\mathfrak{A}=0$ in einen bestimmten Divisor der Kurve $\mathfrak{A}$ übergeht. Damit geht auch jede Klasse von F in eine bestimmte Klasse von $\mathfrak{A}$ über. Es entsteht die Frage, wie müssen zwei Klassen von F beschaffen sein, damit die beiden Klassen für $\mathfrak{A}=0$ in Ergänzungsklassen von $\mathfrak{A}$ übergehen. Die Antwort hierauf ist

Satz 2. Die Klassen $(\mathfrak{Q})$ *und* $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{d}}\right)$, *wo* $(\mathfrak{K})$ *die kanonische Klasse von* F *ist und wo* $\mathfrak{d}$ *den Doppelpunktdivisor von* $\mathfrak{A}$ *bedeutet, gehen für* $\mathfrak{A}=0$ *in Ergänzungsklassen von* $\mathfrak{A}$ *über. Da die kanonische Klasse* $(\mathfrak{w})$ *Ergänzungsklasse der Hauptklasse ist, so geht im besonderen die Klasse* $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ *in die kanonische Klasse von* $\mathfrak{A}$ *über.*

Hierzu ist zu bemerken: Der Divisor $\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{d}}$ kann natürlich nicht selbst benutzt werden, um die Klasse zu bestimmen, in die die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{d}}\right)$ für $\mathfrak{A}=0$ übergeht, da ja für $\mathfrak{A}=0$ dieser Divisor identisch Null wird. Man kann ja aber $\mathfrak{A}$ durch irgendeinen ihm äquivalenten Divisor ersetzen, und es gibt immer solche, die für $\mathfrak{A}=0$ nicht identisch Null werden. Ferner ist der Divisor $\mathfrak{d}$ ein Divisor des Körpers $\mathfrak{A}$, hat also für $\mathfrak{A}=0$ eine bestimmte Bedeutung. Es ergibt sich die Definition:

Ist $\mathfrak{A}$ *ein Primteiler und* $\mathfrak{d}$ *der zugehörige Doppelpunktdivisor, so heißen zwei Klassen Ergänzungsklassen in bezug auf* $\mathfrak{A}$, *wenn ihr Produkt gleich der Klasse* $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ *ist.*

Adjungierte Klassen. Geschlecht einer Klasse. Der Satz 2. gibt uns die Möglichkeit, zwei Begriffe ganz allgemein zu definieren. Da die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ für $\mathfrak{A}=0$ in die kanonische Klasse von $\mathfrak{A}$ übergeht, so schneiden die in dieser Klasse enthaltenen ganzen Divisoren oder vielmehr die ihnen entsprechenden Kurven aus der Kurve $\mathfrak{A}$ eine Schar von speziellen Punktgruppen aus, wie sie eine spezielle φ-Kurve ausschneidet. Kurven dieser Art heißen aber adjungierte Kurven. Daher können wir definieren, gleichgültig ob in der Klasse $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ ganze Divisoren enthalten sind oder nicht*):

Die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ *heißt die adjungierte Klasse zur Kurve oder zum Primteiler* $\mathfrak{A}$.

Diese Definition verallgemeinern wir noch, indem wir sagen:

Die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{Q})$ *heißt die adjungierte Klasse zur Klasse* $(\mathfrak{Q})$.

Hier ist darauf zu achten, daß es sich bei der ersten dieser beiden Definitionen um die adjungierte Klasse zu einem *Primteiler*, bei der zweiten um die adjungierte Klasse zu einer *Klasse* handelt, und daß bei der zweiten auf etwa vorhandene Doppelpunktdivisoren keine Rücksicht genommen ist. Für eine Klasse $(\mathfrak{Q})$ würde man einen Doppelpunktdivisor nur dann definieren können, wenn in ihr ganze Divisoren enthalten sind. Es erweist sich aber nicht als praktisch, einen Unterschied zwischen Klassen zu machen, die ganze Divisoren enthalten, und solchen, die keine enthalten, sondern es ist einfacher, zu unterscheiden zwischen adjungierten Klassen zu einem *Primteiler* und zu einer *Klasse*. Die hier gegebene Definition der adjungierten Klassen ist ganz wesentlich einfacher als die der Herren *Castelnuovo* und *Enriques*.

Da die kanonische Klasse von $\mathfrak{A}$ von der Ordnung $2p-2$ ist, wo p das Geschlecht von $\mathfrak{A}$ bedeutet, so haben wir die Möglichkeit, für p eine Formel aufzustellen. Nämlich die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ geht für $\mathfrak{A}=0$ in die

*) Ein Divisor $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{d}}$ der Klasse $\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}}\right)$ heißt ganz, wenn erstens $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A})$ ist, und wenn zweitens $\mathfrak{G}$ für $\mathfrak{A}=0$ in einen durch $\mathfrak{d}$ teilbaren Divisor übergeht.

kanonische Klasse von $\mathfrak{A}$ über. Die Ordnung einer Klasse $(\mathfrak{q})$, die aus $(\mathfrak{Q})$ für $\mathfrak{A}=0$ entsteht, ist aber, wie wir gesehen haben, $(\mathfrak{A},\mathfrak{Q})$. Also haben wir, wenn wir die Ordnung von $\mathfrak{d}$ mit 2σ bezeichnen,

$$2p-2=\left(\frac{\Re\mathfrak{A}}{\mathfrak{d}},\mathfrak{A}\right)=(\Re\mathfrak{A},\mathfrak{A})-2\sigma.$$

Es wird nämlich durch den Divisor $\mathfrak{d}$ im Nenner die Ordnung des Divisors um 2σ kleiner. Oder es ist

$$p=\frac{1}{2}(\Re\mathfrak{A},\mathfrak{A})-\sigma+1. \tag{5.}$$

Es liegt nun nahe zu definieren:

Die Zahl $\frac{1}{2}(\Re\mathfrak{Q},\mathfrak{Q})+1$ *heißt das Geschlecht der Klasse* $(\mathfrak{Q})$. Diese Definition gilt allgemein. Enthält die Klasse $(\mathfrak{Q})$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$, der ein Primteiler ist, und ist der Doppelpunktdivisor dieses Primteilers gleich 1, so ist $\frac{1}{2}(\Re\mathfrak{Q},\mathfrak{Q})+1=\frac{1}{2}(\Re\mathfrak{A},\mathfrak{A})+1$ das Geschlecht dieses Primteilers. Ist der Doppelpunktdivisor des Primteilers $\mathfrak{A}$ von 1 verschieden, so ist $\frac{1}{2}(\Re\mathfrak{Q},\mathfrak{Q})+1$ zufolge (5.) um die halbe Ordnung des Doppelpunktdivisors kleiner als das Geschlecht von $\mathfrak{A}$. Die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* nennen die Zahl $\frac{1}{2}(\Re\mathfrak{Q},\mathfrak{Q})+1$ das virtuelle Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{Q})$, beschränken sich aber auf ganze Divisoren. Ich halte es für besser, ähnlich wie bei den adjungierten Kurven zu unterscheiden zwischen dem Geschlecht eines Primteilers und dem Geschlecht einer Klasse, und das Geschlecht einer Klasse in der oben angegebenen Weise zu definieren. Die hier gegebene Definition scheint mir auch wesentlich einfacher zu sein als die Definition des virtuellen Geschlechts bei den italienischen Mathematikern.

Grad und Geschlecht des Produkts zweier Klassen. Es ergeben sich nun leicht einige Sätze; sie folgen einfach aus den Rechenregeln für das Symbol $(\mathfrak{Q}_1,\mathfrak{Q}_2)$.

Es seien $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$ zwei beliebige Klassen. Das Geschlecht von $(\mathfrak{Q}_i)$ sei π_i, der Grad sei n_i. Es sei ferner $(\mathfrak{Q})$ das Produkt von $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$. Der Grad von $(\mathfrak{Q})$ sei n und das Geschlecht sei π. Es werde weiter $(\mathfrak{Q}_1,\mathfrak{Q}_2)=i$ gesetzt. Sind in $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$ ganze Divisoren enthalten, so bedeutet i die Zahl der Schnittpunkte, welche die den ganzen Divisoren entsprechenden Kurven miteinander haben. Es hat aber i einen ganz

bestimmten Wert, auch wenn $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$ keinen ganzen Divisor enthalten. Wir haben die Formeln

$$n_i = (\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}_i), \quad \pi_i = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_i \mathfrak{K}, \mathfrak{Q}_i) + 1,$$

$$n = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_1) + (\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_2) + 2(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2),$$

$$n = n_1 + n_2 + 2i. \tag{6.}$$

$$\pi = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}, \mathfrak{Q}) + 1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{K}, \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2) + 1$$

$$= \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{K}, \mathfrak{Q}_1) + \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_2 \mathfrak{K}, \mathfrak{Q}_2) + (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) + 1,$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1. \tag{7.}$$

Diese beiden Formeln (6.) und (7.) gelten bei den hier gegebenen Definitionen ganz allgemein für beliebige Klassen.

Nach Herrn *M. Noether* nennt man das Geschlecht der kanonischen Klasse das *Kurven-Geschlecht* der Fläche und bezeichnet es mit $p^{(1)}$. Ferner bezeichnet man den Grad der kanonischen Klasse — eine auch von Herrn *Noether* eingeführte Zahl — mit $p^{(2)}$. Es ist

$$p^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{K}\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 1 = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 1, \tag{8.}$$

$$p^{(2)} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}).$$

Es besteht also die schon von Herrn *Noether* gegebene Gleichung

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1. \tag{9.}$$

Auch diese Gleichung besteht bei den hier gegebenen Definitionen allgemein. Es zeigt sich eben, daß man einfache Gleichungen nur bekommt, wenn man nicht von einzelnen Primteilern oder Divisoren spricht, sondern von den Klassen.

Man kann nach dem Vorgange von Herrn *Castelnuovo* zu einer Klasse $(\mathfrak{Q})$ die adjungierte $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K})$ und zu dieser wieder die adjungierte $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^2)$ bilden usw. Es bedeute $n^{(i)}$ den Grad von $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^i)$, der i-ten adjungierten Klasse zu $\mathfrak{Q}$, und $\pi^{(i)}$ das Geschlecht dieser Klasse. Dann ist

$$n^{(i)} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^i, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^i) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) + 2i(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) + i^2(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}),$$

$$\pi^{(i)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^i, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{i+1}) + 1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) + \frac{2i+1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) + \frac{i(i+1)}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}),$$

also

(10.) $$2\pi^{(i)}-n^{(i)}=(\mathfrak{Q},\mathfrak{K})+i(\mathfrak{K},\mathfrak{K}).$$

Daraus folgt unter Benutzung der Gleichung (8.)

(11.) $$2\pi^{(i+1)}-n^{(i+1)}=2\pi^{(i)}-n^{(i)}+p^{(1)}-1.$$

Eine einfache Beziehung besteht auch noch zwischen Geschlecht und Grad von Ergänzungsklassen. Sind nämlich π, n und π', n' Geschlecht und Grad einer Klasse $(\mathfrak{Q})$ und ihrer Ergänzungsklasse $(\mathfrak{Q}')=\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{Q}}\right)$, so ist, wie man leicht durch Ausrechnung findet,

$$n-\pi=\frac{1}{2}(\mathfrak{Q},\mathfrak{Q})-\frac{1}{2}(\mathfrak{Q},\mathfrak{K})-1,$$

$$n'-\pi'=\frac{1}{2}(\mathfrak{Q}',\mathfrak{Q}')-\frac{1}{2}(\mathfrak{Q}',\mathfrak{K})-1=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{Q}},\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{Q}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{D}},\mathfrak{K}\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}(\mathfrak{Q},\mathfrak{Q})-\frac{1}{2}(\mathfrak{Q},\mathfrak{K})-1.$$

Also besteht die einfache Gleichung

(12.) $$n-\pi=n'-\pi'.$$

Der Defekt einer Klasse in bezug auf einen Primteiler. Es sei $(\mathfrak{Q})$ irgendeine Klasse, und es sei $\mathfrak{A}$ irgendein Primteiler. Für $\mathfrak{A}=0$ geht die Klasse $(\mathfrak{Q})$ über in eine bestimmte Klasse $(\mathfrak{q})$ des Körpers $\mathfrak{A}$. Dabei gehen die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{Q})$ über in ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q})$. Es sei etwa r die Dimension von $(\mathfrak{Q})$, und es seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_r$ r linear unabhängige ganze Divisoren aus $(\mathfrak{Q})$. Aus ihnen mögen für $\mathfrak{A}=0$ die ganzen Divisoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_r$ der Klasse $(\mathfrak{q})$ hervorgehen. Diese Divisoren $\mathfrak{g}_i$ brauchen nun aber nicht linear unabhängig zu sein, da es ja ganze Divisoren in $(\mathfrak{Q})$ geben kann, die für $\mathfrak{A}=0$ identisch verschwinden. Die Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{Q})$, die für $\mathfrak{A}=0$ verschwinden, sei r'. Dann ist die Zahl der linear unabhängigen der Divisoren $\mathfrak{g}_i$ gleich $r-r'$. Die Dimension der Klasse $(\mathfrak{q})$ ist dann mindestens gleich $r-r'$. Sie kann aber auch größer sein. Die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q})$ stellen geometrisch die Punktgruppen dar, die aus $\mathfrak{A}$ durch die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{Q})$, also durch die Kurvenschar $c_1\mathfrak{G}_1+c_2\mathfrak{G}_2+\cdots+c_r\mathfrak{G}_r=0$, ausgeschnitten werden. Diese Schar von Punktgruppen braucht nicht vollständig zu sein. Ihre Dimension ist aber, wie schon eben angegeben, mindestens gleich $r-r'$. Die wirkliche Dimension wird

bezeichnet mit $|q|$. Die Differenz zwischen $|q|$ und $r-r'$ heißt der Defekt der Klasse $(\mathfrak{Q})$ in bezug auf den Primteiler $\mathfrak{A}$. Wir bezeichnen sie durch

$$|q|-(r-r')=\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}).$$

Aus der Definition von $\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q})$ folgt ohne weiteres

$$\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q})\geqq 0.$$

Es ist zu setzen $r=|\mathfrak{Q}|$. Ferner wird ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{Q})$ dann und nur dann für $\mathfrak{A}=0$ verschwinden, wenn er von der Form ist $\mathfrak{A}\mathfrak{G}'$, wo $\mathfrak{G}'$ ein ganzer Divisor ist. Da aber $\mathfrak{A}\mathfrak{G}'$ der Klasse $(\mathfrak{Q})$ angehört, so gehört $\mathfrak{G}'$ der Klasse $\left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}}\right)$ an. Daher ist r' gleich der Dimension dieser Klasse, $r'=\left\{\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}}\right\}$. Wir haben demnach die Gleichung

$$(13.)\qquad |q|-|\mathfrak{Q}|+\left\{\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}}\right\}=\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}).$$

Der Riemann-Rochsche Satz. Die Zahl der linear unabhängigen Doppeldifferentiale erster Gattung wird, wie schon oben angegeben, mit p_g bezeichnet und heißt das geometrische Geschlecht der Fläche. Die Zahl der linear unabhängigen *Picard*schen (totalen) Differentiale erster Gattung wird mit δ bezeichnet. Die Zahl $p_g-\delta$ wird p_n genannt und heißt das *numerische Geschlecht* der Fläche.

Es sei $\mathfrak{T}$ irgendein Divisor. Es sei ferner $\mathfrak{T}'=\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{T}}$ der Ergänzungsdivisor zu $\mathfrak{T}$. Ferner sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler mit folgenden Eigenschaften: 1.) Der Primteiler $\mathfrak{A}$ habe den Doppelpunktdivisor 1. 2.) In der Klasse $(\mathfrak{T}\mathfrak{A})$ sei ein Primteiler mit dem Doppelpunktdivisor 1 vorhanden. Damit $\mathfrak{A}$ existiert, darf $\mathfrak{T}$ nicht ganz beliebig sein*). Setzen wir zur Abkürzung

$$(14.)\qquad \omega_{\mathfrak{T}}=\delta+\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}\mathfrak{A})-\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}')+\omega_{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K})-\omega_{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}\mathfrak{A}),$$

so besteht die Gleichung*)

$$(15.)\qquad |\mathfrak{T}|+|\mathfrak{T}'|=\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{T})-\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{K})+p_n+1+\omega_{\mathfrak{T}}.$$

Diese Formel enthält also den *Riemann-Roch*schen Satz für algebraische

*) Siehe die Berichtigung in Bd. 19 der Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung zu meiner Arbeit über den *Riemann-Roch*schen Satz in Bd. 18, S. 267 derselben Zeitschrift.

Funktionen von zwei Veränderlichen. Der Formel können wir noch eine etwas andere Gestalt geben. Bezeichnen wir den Grad der Klasse $(\mathfrak{T})$ mit n und ihr Geschlecht mit π, so ist

$$n=(\mathfrak{T},\mathfrak{T}),\quad \pi=\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{T})+\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{K})+1,$$

also

$$|\mathfrak{T}|=n-\pi+p_n+2+\omega_{\mathfrak{T}}-|\mathfrak{T}'|. \tag{16.}$$

Die Zahl $\omega_{\mathfrak{T}}$, die aber nicht immer positiv ist, heißt der *Überschuß* der Klasse („sovrabondanza"). Ist $|\mathfrak{T}'|$ von Null verschieden, so heißt die Klasse $(\mathfrak{T})$ *speziell* und $|\mathfrak{T}'|$ der *Index der Spezialität.* Sind $|\mathfrak{T}'|$ und $\omega_{\mathfrak{T}}$ beide Null, so heißt die Klasse *regulär.* Setzen wir in (15.) im besonderen $\mathfrak{T}=1$, also $\mathfrak{T}'=\mathfrak{K}$, und bedenken, daß $|1|=1$ und $|\mathfrak{K}|=p_g$, so bekommen wir

$$1+p_g=p_n+1+\omega_1.$$

Da sich aus (14.) für ω_1 der Wert δ ergibt, so ist diese Gleichung eine Identität. Setzen wir aber $\mathfrak{T}=\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{T}'=1$, so wird (15.) zu

$$p_g+1=p_n+1+\omega_{\mathfrak{K}}.$$

Aber aus (14.) folgt, wenn wir bedenken, daß $\omega_{\mathfrak{A}}(1)=0$,

$$\omega_{\mathfrak{K}}=\delta+\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A})+\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K})-\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}).$$

Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein und beachten, daß $p_n+\delta=p_g$, so folgt

$$\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A})=\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A})-\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}). \tag{17.}$$

Die charakteristische Reihe eines Primteilers. Reguläre Klassen. Es sei in der Klasse $(\mathfrak{T})$ ein Primteiler enthalten ohne Doppelpunktdivisor. Es sei $\mathfrak{T}$ selbst dieser Primteiler und es sei ferner die Klasse $(\mathfrak{T})$ nicht speziell. Wir können dann in der Formel für den *Riemann-Roch*schen Satz den Primteiler $\mathfrak{A}$ einfach gleich 1 setzen und bekommen

$$|\mathfrak{T}|=\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{T})-\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{K})+p_n+1+\delta+\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{K})-\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{T}). \tag{18.}$$

Hieraus ersehen wir, daß die Klasse $(\mathfrak{T})$ dann und nur dann regulär ist, wenn die Gleichung besteht

$$\delta=\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{T})-\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{K}). \tag{19.}$$

Enthält die Klasse $(\mathfrak{T})$ außer $\mathfrak{T}$ noch andere ganze Divisoren, so bildet die Gesamtheit der ganzen Divisoren eine Kurvenschar. Diese Schar schneidet auf der Kurve $\mathfrak{T}$ Punktgruppen aus. Diese Punktgruppen heißen die charakteristische Reihe von $\mathfrak{T}$. Diese Reihe ist also nichts anderes als die Gesamtheit der ganzen Divisoren, in die die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{T})$ für $\mathfrak{T}=0$ übergehen. Es sind das also ganze Divisoren derjenigen Klasse, in die $(\mathfrak{T})$ für $\mathfrak{T}=0$ übergeht. Die charakteristische Reihe braucht nicht eine vollständige Reihe von Punktgruppen zu sein. Ihr Defekt ist in unserer Bezeichnung $\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{T})$. Wir können den Begriff der charakteristischen Reihe etwas verallgemeinern, indem wir die Klasse, in die $(\mathfrak{T})$ für $\mathfrak{T}=0$ übergeht, die charakteristische Klasse von $\mathfrak{T}$ nennen. Enthält $(\mathfrak{T})$ außer $\mathfrak{T}$ keine ganzen Divisoren, so braucht $\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{T})$ nicht gleich Null zu sein, denn es kann dann trotzdem die Klasse, in die $(\mathfrak{T})$ für $\mathfrak{T}=0$ übergeht, ganze Divisoren enthalten.

Da sowohl δ wie auch $\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{K})$ ihrer Bedeutung nach nicht negativ sein können, so folgt aus (19.):

Ist die charakteristische Reihe eines Primteilers $\mathfrak{T}$, dessen Doppelpunktdivisor gleich 1 *ist und dessen Klasse $(\mathfrak{T})$ regulär ist, vollständig, so ist $\delta=0$, d. h. es ist $p_g=p_n$.*

Wir können aber nicht umgekehrt schließen, daß wenn $\delta=0$, dann die charakteristische Reihe von $\mathfrak{T}$ unter sonst gleichen Voraussetzungen vollständig ist, denn für $\delta=0$ folgt nur $\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{T})=\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{K})$.

Über die Potenzen einer Klasse. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler, der die Bedingungen erfüllt, die der Primteiler $\mathfrak{A}$ in der Formel des *Riemann-Roch*schen Satzes erfüllen muß. Wir nehmen weiter an, daß auch die Klassen $(\mathfrak{A}^2), (\mathfrak{A}^3), \ldots$ Primteiler enthalten, die diese Bedingungen erfüllen. Es sei allgemein $\mathfrak{A}_i$ ein solcher Primteiler aus der Klasse $(\mathfrak{A}^i)$. Den Defekt der Klasse $(\mathfrak{A}^i\mathfrak{K})$ bezeichnet Herr *Castelnuovo* mit $\delta(i\mathfrak{A})$. Wir bezeichnen ihn also mit $\delta(\mathfrak{A}^i)$ oder kürzer mit δ_i. Es ist δ_i der Defekt der Schar von Punktgruppen, die auf einem der Primteiler von $(\mathfrak{A}^i)$, also etwa auf $\mathfrak{A}_i$, durch die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{A}^i\mathfrak{K})$ ausgeschnitten werden. Da $(\mathfrak{A}^i\mathfrak{K})$ die zu $(\mathfrak{A}^i)$ adjungierte Klasse ist, so sind die ausgeschnittenen Punktgruppen *spezielle* Punktgruppen, wie sie von den speziellen φ-Kurven von $\mathfrak{A}_i$ auf $\mathfrak{A}_i$ ausgeschnitten werden. Nach unserer Bezeichnungsweise ist

$$\delta_i=\omega_{\mathfrak{A}^i}(\mathfrak{A}^i\mathfrak{K}). \tag{20.}$$

Die Ergänzungsklasse zur Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha})$ ist $(\mathfrak{A}^{-\alpha})$. Ihre Dimension ist also für $\alpha>0$ gleich Null. Ersetzen wir also in der Gleichung (18.) für den *Riemann-Roch*schen Satz $\mathfrak{T}$ einmal durch $\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}$ und das zweitemal durch $\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}$ und nehmen an, daß $\alpha>1$ ist, so bekommen wir durch Subtraktion der beiden so erhaltenen Gleichungen

$$(21.)\quad \begin{aligned}\{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}\}-\{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}\}&=\frac{2\alpha-1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{A})+\frac{1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{K})\\ &+\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}}(\mathfrak{K})-\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}(\mathfrak{K})+\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1})-\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}).\end{aligned}$$

Ersetzen wir ferner in der Gleichung (17.) einmal $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^{\alpha-1}$ und dann durch $\mathfrak{A}^{\alpha}$ und subtrahieren die beiden so erhaltenen Gleichungen, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\omega_{\mathfrak{A}^{\alpha-1}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1})-\omega_{\mathfrak{A}^{\alpha}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha})&=\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1})\\ -\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}(\mathfrak{K})-\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha})+\omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}}(\mathfrak{K}).&\end{aligned}$$

Mit Benutzung dieser Formel und mit Benutzung von (20.) nimmt (21.) die Gestalt an

$$(22.)\quad \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}\}-\{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}\}=\frac{2\alpha-1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{A})+\frac{1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{K})+\delta_{\alpha-1}-\delta_{\alpha}.$$

Diese Formel gilt für $\alpha>1$. Setzen wir ferner in der Formel (13.) $\mathfrak{Q}=\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}$ und ordnen die Glieder etwas anders, so bekommen wir

$$(23.)\quad \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}\}-\{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}\}=\{\mathfrak{q}\}-\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}).$$

Hierin bedeutet $(\mathfrak{q})$ diejenige Klasse des Körpers $\mathfrak{A}$, in die $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha})$ für $\mathfrak{A}=0$ übergeht. Die Ergänzungsklasse zu dieser Klasse ist diejenige Klasse, in die $(\mathfrak{A}^{1-\alpha})$ für $\mathfrak{A}=0$ übergeht. Nehmen wir also an, daß $\alpha>1$, so ist die Dimension der Ergänzungsklasse gleich Null. Bezeichnen wir die Ordnung von $(\mathfrak{q})$ mit ν, das Geschlecht von $\mathfrak{A}$ mit π, so ist nach dem *Riemann-Roch*schen Satze für algebraische Funktionen einer Veränderlichen

$$\{\mathfrak{q}\}=\nu-\pi+1.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\nu&=(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha},\mathfrak{A})=(\mathfrak{A},\mathfrak{K})+\alpha(\mathfrak{A},\mathfrak{A}),\\ \pi-1&=\frac{1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{A})+\frac{1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{K}).\end{aligned}$$

Danach wird

$$\{q\} = \frac{2\alpha-1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{K}).$$

Führen wir dies in (23.) ein, so bekommen wir

$$\{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha\} - \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha-1}\} = \frac{2\alpha-1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{A},\mathfrak{K}) - \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha).$$

Vergleichen wir dies mit (22.), so bekommen wir die Gleichung

$$\delta_\alpha - \delta_{\alpha-1} = \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha).$$

Setzen wir in dieser Gleichung für α der Reihe nach die Werte $2, 3, \ldots \varrho$ und addieren dann, so bekommen wir

$$\delta_\varrho - \delta_1 = \sum_{\alpha=2}^{\varrho} \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha). \tag{24.}$$

Es ist aber zufolge der Definitionsgleichung (20.)

$$\delta_1 = \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}).$$

Wir können daher Gleichung (24.) auch folgendermaßen schreiben

$$\delta_\varrho = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha). \tag{25.}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß für hinlänglich großes α die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha)$ regulär ist. Es sei etwa die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\varrho)$ regulär. Dann können wir in der Formel (19.) $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\varrho$ ersetzen und bekommen

$$\delta = \omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\varrho}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\varrho) - \omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\varrho}(\mathfrak{K}). \tag{26.}$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung, die aus (17.) hervorgeht, wenn wir $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^\varrho$ ersetzen, so folgt

$$\delta = \omega_{\mathfrak{A}^\varrho}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\varrho)$$

oder mit Benutzung von (20.)

$$\delta = \delta_\varrho.$$

Es folgt daher aus (25.) die Gleichung

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha). \tag{27.}$$

Es folgt dann weiter, daß für $\alpha \geqq \varrho$ immer $\delta_\alpha = \delta$ ist und daß für $\alpha > \varrho$ $\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^\alpha) = 0$ ist. Es sei bemerkt, daß es nach einem Satze von Herrn *Picard* jedenfalls auch solche Primteiler $\mathfrak{A}$ gibt, bei denen die zuletzt

benutzte Zahl $\varrho = 1$ gesetzt werden kann. Es sei $\mathfrak{A}$ ein solcher Primteiler. Dann können wir den Wert von $\omega_{\mathfrak{T}}$, der durch (14.) gegeben ist, in etwas einfacherer Form darstellen. Schreiben wir nämlich in (15.) $\mathfrak{T}'$ statt $\mathfrak{T}$, so bekommen wir, da $(\mathfrak{T})$ die Ergänzungsklasse zu $(\mathfrak{T}')$ ist,

$$(28.) \qquad |\mathfrak{T}'|+|\mathfrak{T}| = \frac{1}{2}(\mathfrak{T}',\mathfrak{T}') - \frac{1}{2}(\mathfrak{T}',\mathfrak{K}) + p_n + 1 + \omega_{\mathfrak{T}'}.$$

Durch Ausrechnung findet man leicht

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{T}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{T},\mathfrak{K}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{T}',\mathfrak{T}') - \frac{1}{2}(\mathfrak{T}',\mathfrak{K}).$$

Durch Vergleichen mit (15.) folgt also aus (28.)

$$\omega_{\mathfrak{T}} = \omega_{\mathfrak{T}'} = \delta + \omega_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{B}) - \omega_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{T}) + \omega_{\mathfrak{T}'\mathfrak{B}}(\mathfrak{K}) - \omega_{\mathfrak{T}'\mathfrak{B}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{B}).$$

Hier ist $\omega_{\mathfrak{T}'}$ aus (14.) bestimmt, wobei $\mathfrak{B}$ statt $\mathfrak{A}$ geschrieben ist. Für den Hilfsprimteiler $\mathfrak{B}$ können wir bei unseren Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ einen Primteiler aus der Klasse $(\mathfrak{T}\mathfrak{A})$ nehmen. Dann bekommen wir

$$(29.) \quad \omega_{\mathfrak{T}} = \omega_{\mathfrak{T}'} = \delta + \omega_{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) - \omega_{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}) + \omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}) - \omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}).$$

Aus (26.) folgt aber, da wir angenommen haben, daß wir $\varrho = 1$ setzen dürfen,

$$\delta = \omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) - \omega_{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}).$$

Hiermit folgt aus (29.) folgender Wert für $\omega_{\mathfrak{T}}$:

$$(30.) \qquad \omega_{\mathfrak{T}} = \omega_{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) - \omega_{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}).$$

Diese Formel gilt ihrer Herleitung nach, wenn der Primteiler $\mathfrak{A}$ erstens die vor Formel (14.) angegebenen Bedingungen erfüllt und wenn außerdem $\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}) = 0$ für $\alpha > 1$.

Die mehrfachen Geschlechter der Fläche. Nach dem Vorgange von Herrn *Castelnuovo* nennt man die Dimension der Klasse $(\mathfrak{K}^i)$ das i-fache Geschlecht der Fläche und bezeichnet es mit P_i. Es ist also $P_1 = |\mathfrak{K}| = p_g$. Wir wollen das Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{K}^i)$ mit $p_i^{(1)}$ bezeichnen und den Grad mit $p_i^{(2)}$. Dann ist

$$p_i^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{K}^i, \mathfrak{K}^i\mathfrak{K}) + 1 = \frac{i(i+1)}{2}(\mathfrak{K},\mathfrak{K}) + 1,$$

also nach (8.)

$$(31.) \qquad p_i^{(1)} = \frac{i(i+1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1;$$

ferner

$$p_i^{(2)} = (\mathfrak{R}^i, \mathfrak{R}^i) = i^2(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = i^2(p^{(1)} - 1). \tag{32.}$$

Das Geschlecht P_i ergibt sich aus dem *Riemann-Roch*schen Satze. Ich will es nur für den Fall hinschreiben, daß die Klasse $(\mathfrak{R}^i)$ regulär ist. Dann ist

$$P_i = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}^i, \mathfrak{R}^i) - \frac{1}{2}(\mathfrak{R}^i, \mathfrak{R}) + p_n + 1$$

$$= \frac{i(i-1)}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) + p_n + 1$$

oder

$$P_i = \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + p_n + 1. \tag{33.}$$

Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen.

Von Herrn *Axel Thue* in Christiania.

1. In zwei soeben erschienenen Abhandlungen*) habe ich eine Methode entwickelt, durch welche man gewisse eigentümliche Annäherungswerte der Wurzeln der ganzen Funktionen:

$$x^3-ax-b \quad \text{und} \quad x^n-c$$

finden kann. Ich will hier eine Generalisation dieses Verfahrens zeigen.

Ich will nachweisen, wie man für gewisse ganze Funktionen $F(x)$ r-ten Grades solche ganze Funktionen $A_n(x)$ und $B_n(x)$ vom Grade $rn+1$ konstruieren kann, daß

$$\varrho A_n(x)-B_n(x)=(x-\varrho)^{2n+1}C_n(x),$$

wo $F(\varrho)=0$, während $C_n(x)$ eine ganze Funktion wird**).

Das Hauptresultat dieser Abhandlung lautet:

2. *Theorem. Bedeutet $F(x)$ eine solche ganze Funktion r-ten Grades in x, daß man eine ganze Funktion $U(x)$ zweiten Grades in x finden kann, wo:*

$$(1.)\quad U(x)F''(x)-(r-1)U'(x)F'(x)+\frac{(r-1)r}{2}U''(x)F(x)=0,$$

*) 1. Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzeln der ganzen Funktion dritten Grades x^3-ax-b. Christiania Videnskabsselskabs Skrifter, 1908.

2. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Ebenda 1908.

**) Vgl. meine Arbeit: Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Dieses Journal, Bd. 135, S. 285.

während alle Wurzeln von F verschieden sind, und definiert man die Funktionen $A_m(x)$ und $B_m(x)$ durch die Gleichungen:

$$(2.) \qquad H(x) = U(x)F'(x) - \frac{r}{2}U'(x)F(x),$$

$$(3.) \qquad 4\lambda = U'^2(x) - 2U(x)U''(x),$$

$$(4.) \qquad A_0(x) = (r-1)\lambda,$$

$$(5.) \qquad B_0(x) = (r-1)\lambda x,$$

$$(6.) \qquad A_1(x) = U(x)F'(x) - \frac{r-1}{2}U'(x)F(x),$$

$$(7.) \qquad B_1(x) = \left[U(x)F'(x) - \frac{r-1}{2}U'(x)F(x)\right]x - U(x)F(x),$$

$$(8.) \qquad A_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)H(x)A_n(x) - (rn+1)F^2(x)A_{n-1}(x)}{\lambda[r(n+1)-1]},$$

$$(9.) \qquad B_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)H(x)B_n(x) - (rn+1)F^2(x)B_{n-1}(x)}{\lambda[r(n+1)-1]},$$

so erhält man für jede ganze nicht negative Zahl m, wenn

$$F(\varrho) = 0,$$

die Gleichung:

$$(10.) \qquad \varrho A_m(x) - B_m(x) = (x-\varrho)^{2m+1}C_m(x),$$

wo $A_m(x)$ und $B_m(x)$ ganze Funktionen vom Grade $rm+1$ sind, während $C_m(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $(r-2)m$ wird.

Außerdem kann man, wenn λ und die Koeffizienten von $F(x)$ rationale Größen sind, eine solche ganze Zahl c und zwei solche von m unabhängige positive Größen a und b finden, daß alle Koeffizienten von $cA_m(x)$ und $cB_m(x)$ ganze Zahlen werden, während der Modulus jedes dieser Koeffizienten kleiner als a^m und der Modulus jedes der Koeffizienten von $cC_m(x)$ kleiner als b^m ist.

Um nun zu beweisen, daß $C_m(x)$ immer eine ganze Funktion wird, wollen wir zuerst folgenden Hilfssatz entwickeln:

Definiert man die Funktionen $P_m(x)$ und $Q_m(x)$ durch die Gleichungen:

$$(11.) \qquad Y(x) = 2U(x)F'(x) - rU'(x)F(x),$$

$$(12.) \qquad 0 \leqq h = (r^2-1)\lambda,$$

$$(13.) \qquad P_0(x) = \frac{2}{3}h,$$

$$(14.) \qquad Q_0(x) = \frac{2}{3}hx,$$

$$(15.) \qquad P_1(x) = U(x)F'(x) - \frac{r-1}{2}U'(x)F(x),$$

$$(16.)\qquad Q_1(x)=xP_1(x)-U(x)F(x),$$

$$(17.)\qquad P_{n+1}(x)=k_nY(x)P_n(x)-F^2(x)P_{n-1}(x),$$

$$(18.)\qquad Q_{n+1}(x)=k_nY(x)Q_n(x)-F^2(x)Q_{n-1}(x),$$

$$(19.)\qquad c_1=\frac{3}{2},$$

$$(20.)\qquad c_2=\frac{2}{3}\,\frac{(2r-1)(2r+1)}{(r-1)(r+1)}h,$$

$$(21.)\qquad k_nc_n=\frac{2n+1}{2},$$

$$(22.)\qquad \frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{k_n}=2h\,\frac{r^2}{(r-1)(r+1)},$$

dann erhält man für jede ganze positive Zahl n:

$$(23.)\quad U(x)P'_{n+1}(x)-\frac{r(n+1)+1}{2}U'(x)P_{n+1}(x)=c_{n+1}F(x)P_n(x),$$

$$(24.)\quad U(x)Q'_{n+1}(x)-\frac{r(n+1)+1}{2}U'(x)Q_{n+1}(x)=c_{n+1}F(x)Q_n(x).$$

Man sieht nämlich zuerst ein, daß diese Gleichungen richtig sind für $n=0$ und $n=1$.

Gelten sie aber für c_{n-1} und c_n, so müssen sie auch für c_{n+1} gelten. Wir bekommen nämlich dann z. B.:

$$\begin{aligned}
&UP'_{n+1}-\frac{r(n+1)+1}{2}U'P_{n+1}-c_{n+1}FP_n\\
&=U[k_n(YP'_n+Y'P_n)-2FF'P_{n-1}-F^2P'_{n-1}]\\
&\quad-\frac{r(n+1)+1}{2}U'[k_nYP_n-F^2P_{n-1}]-c_{n+1}FP_n\\
&=P_n\Big[k_n[UY'-\frac{r(n+1)+1}{2}U'Y]-c_{n+1}F\Big]\\
&\quad+P_{n-1}\Big[-2UFF'+\frac{r(n+1)+1}{2}U'F^2\Big]\\
&+k_nY\Big[\frac{rn+1}{2}U'P_n+c_nFP_{n-1}\Big]-F^2\Big[\frac{r(n-1)+1}{2}U'P_{n-1}+c_{n-1}FP_{n-2}\Big]\\
&=P_n\Big[k_n[UY'-\frac{r}{2}U'Y]-c_{n+1}F\Big]\\
&\quad+P_{n-1}[c_nk_nYF-2UFF'+rU'F^2]-c_{n-1}F^3P_{n-2}\\
&=P_{n-1}\Big[k_{n-1}Y[k_n(UY'-\frac{r}{2}U'Y)-c_{n+1}F]+k_nc_nYF-2UFF'+rU'F^2\Big]\\
&\quad+F^2P_{n-2}\Big[-k_n(UY'-\frac{r}{2}U'Y)+(c_{n+1}-c_{n-1})F\Big].
\end{aligned}$$

Hier wird aber:

$$\frac{r}{2}U'Y-UY'+\frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{k_n}F$$

$$=\frac{r}{2}U'[2UF'-rU'F]-U[2UF''+2U'F'-rU'F'-rU''F]+\frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{k_n}F$$

$$=\frac{r}{2}U'[2UF'-rU'F]-U[2(r-1)U'F'-r(r-1)U''F+2U'F'$$

$$-rU'F'-rU''F]+\frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{k_n}F$$

$$=-\frac{r^2}{2}F[U_1^2-2UU'']+\frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{k_n}F=\left[-2h\frac{r^2}{r^2-1}+\frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{k_n}\right]F=0.$$

Aus diesen Resultaten erhält man ferner:

$$k_{n-1}Y\left[k_n(UY'-\frac{r}{2}U'Y)-c_{n+1}F\right]+k_nc_nYF-2UFF'+rU'F^2$$

$$=k_{n-1}Y[-c_{n-1}F]+k_nc_nYF-2UFF'+rU'F^2$$

$$=[k_nc_n-k_{n-1}c_{n-1}]YF-2UFF'+rU'F^2=[Y-2UF'+rU'F]F=0$$

oder

$$UP'_{n+1}-\frac{r(n+1)+1}{2}U'P_{n+1}-c_{n+1}FP_n=0.$$

Hierdurch ist somit unser Hilfssatz bewiesen.

Aus (17.), (18.), (23.) und (24.) bekommt man durch Elimination von Y und U' die folgenden Sätze:

(25.) $$P_{n+1}(x)Q_n(x)-P_n(x)Q_{n+1}(x)=\frac{2}{3}hU(x)F^{2n+1}(x),$$

(26.) $$P_n(x)Q'_n(x)-P'_n(x)Q_n(x)=\frac{2}{3}c_nhF^{2n}(x).$$

Wir bemerken, daß der Grad von Y gleich r wird. Ferner wird h konstant, und $P_1(x)$ sowohl als $Q_1(x)$ wird vom Grade $r+1$.

Wir können nun leicht nachweisen, daß $\varrho P_n(x)-Q_n(x)$ durch $(x-\varrho)^{2n+1}$ teilbar ist, oder daß:

(27.) $$\varrho P_n(x)-Q_n(x)=(x-\varrho)^{2n+1}R_n(x),$$

wo $R_n(x)$ eine ganze Funktion in bezug auf x wird.

Man sieht gleich ein, daß der Satz richtig ist, für $n=0$ und $n=1$.

Ist indessen der Satz richtig für $n=m-1$ und $n=m$, so erhalten wir hier aus (17.) und (18.)

(α) $$\varrho P_{m+1}-Q_{m+1}=(x-\varrho)^{2m+1}T(x),$$

wo T eine ganze Funktion von x ist.

Aus (α) erhält man ferner:

$$(\beta) \qquad \varrho P'_{m+1} - Q'_{m+1} = (x-\varrho)^{2m}[(x-\varrho)T' + (2m+1)T]$$

oder aus (α) und (β):

$$P'_{m+1}Q_{m+1} - P_{m+1}Q'_{m+1} = (x-\varrho)^{2m}[P_{m+1}[(x-\varrho)T' + (2m+1)T] - (x-\varrho)P'_{m+1}T] = -\frac{2}{3}c_{m+1}hF^{2m+2}.$$

$P_{m+1}T$ und folglich auch T, da $h \gtrless 0$, wird also durch $(x-\varrho)$ teilbar sein.

Setzt man

$$T(x) = (x-\varrho)S(x),$$

so erhält man ferner, daß

$$T' + (2m+1)S = (x-\varrho)S' + S + (2m+1)S$$

oder daß S durch $(x-\varrho)$ teilbar sein muß.

Unsere Behauptung (27.) ist somit bewiesen.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir zuerst c_n und k_n bestimmen. Aus (21.) und (22.) erhält man

$$c_{n+1}c_n - c_n c_{n-1} = (2n+1)\frac{r^2}{r^2-1}h$$

oder

$$(28.) \qquad c_{n+1} \cdot c_n = \frac{[r(n+1)+1][r(n+1)-1]}{(r+1)(r-1)}h.$$

Für gerades n wird also:

$$(29.) \quad c_{n+1} = \frac{3}{2}\left[\frac{(r(n+1)+1)(r(n+1)-1)}{(rn+1)(rn-1)}\right]\left[\frac{(r(n-1)+1)(r(n-1)-1)}{(r(n-2)+1)(r(n-2)-1)}\right]\cdots\left[\frac{(3r+1)(3r-1)}{(2r+1)(2r-1)}\right].$$

Für ungerades n erhält man aber:

$$(30.) \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}\left[\frac{(r(n+1)+1)(r(n+1)-1)}{(rn+1)(rn-1)}\right]\cdots\left[\frac{(2r+1)(2r-1)}{(r+1)(r-1)}\right]h,$$

$$(31.) \qquad k_n = \frac{2n+1}{2c_n}.$$

Multipliziert man endlich für $n \geqq 2$ die Gleichungen (8.), (9.) und (27.) mit

$$3\frac{(2r+1)(3r+1)\cdots(nr+1)}{c_1 c_2 \cdots c_{n-1}}$$

und setzt man:

$$(32.)\qquad A_n(x)=\frac{3}{2(r+1)}\cdot\frac{(r+1)(2r+1)\cdots(nr+1)}{c_1c_2\cdots c_n}P_n(x),$$

$$(33.)\qquad B_n(x)=\frac{3}{2(r+1)}\cdot\frac{(r+1)(2r+1)\cdots(nr+1)}{c_1c_2\cdots c_n}Q_n(x),$$

$$(34.)\qquad C_n(x)=\frac{3}{2(r+1)}\cdot\frac{(r+1)(2r+1)\cdots(nr+1)}{c_1c_2\cdots c_n}R_n(x),$$

so entstehen die Gleichungen (8.), (9.) und (10.).

Sind $A_0(x)$ und $B_0(x)$ durch die Gleichungen (4.) und (5.) definiert, so gelten (8.) und (9.) auch für $n=1$.

Um nun den zweiten Teil unseres Haupttheorems zu beweisen, wollen wir A_n und B_n durch zwei Reihen ausdrücken.

Setzen wir

$$(35.)\qquad \varphi_n(x)=\sqrt{\lambda}^n A_n(x),$$

und

$$(36.)\qquad \psi_n(x)=\sqrt{\lambda}^n B_n(x),$$

und ferner

$$(37.)\qquad G=\frac{H}{r\sqrt{\lambda}},$$

so erhalten wir aus (8.) und (9.)

$$(38.)\qquad \varphi_{n+1}=\frac{r(2n+1)G\varphi_n-(rn+1)F^2\varphi_{n-1}}{r(n+1)-1},$$

$$(39.)\qquad \psi_{n+1}=\frac{r(2n+1)G\psi_n-(rn+1)F^2\psi_{n-1}}{r(n+1)-1}.$$

Hier können wir wieder setzen:

$$(40.)\qquad z+y=G,$$

$$(41.)\qquad z-y=F,$$

d. h.

$$z=\frac{G(x)+F(x)}{2},\quad y=\frac{G(x)-F(x)}{2}$$

oder

$$(42.)\qquad \varphi_{n+1}=\frac{r(2n+1)(z+y)\varphi_n-(rn+1)(z-y)^2\varphi_{n-1}}{r(n+1)-1},$$

$$(43.) \qquad \psi_{n+1} = \frac{r(2n+1)(z+y)\psi_n - (rn+1)(z-y)^2\psi_{n-1}}{r(n+1)-1}.$$

Nach sukzessiven Anwendungen dieser Gleichungen erhält man:

$$(44.) \qquad \varphi_n(x) = N(z,y)\varphi_1(x) - M(z,y)\varphi_0(x),$$

$$(45.) \qquad \psi_n(x) = N(z,y)\psi_1(x) - M(z,y)\psi_0(x).$$

Setzt man nun

$$U_n(z,y) = z^n + \frac{n}{1}\frac{rn+1}{r-1}yz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(rn+1)(r[n-1]+1)}{(r-1)(2r-1)}y^2z^{n-2}$$

$$+\cdots+\binom{n}{k}\frac{(rn+1)(r[n-1]+1)\cdots(r[n-k+1]+1)}{(r-1)(2r-1)\cdots(kr-1)}y^kz^{n-k}+\cdots,$$

so hat man*):

$$U_n(z,y) = N(z,y)U_1(z,y) - M(z,y)U_0(z,y),$$

$$U_n(y,z) = N(z,y)U_1(y,z) - M(z,y)U_0(y,z)$$

oder

$$U_n(z,y) = N(z,y)\left[z+\frac{r+1}{r-1}y\right] - M(z,y),$$

$$U_n(y,z) = N(z,y)\left[\frac{r+1}{r-1}z+y\right] - M(z,y)$$

oder

$$(46.) \qquad N(z,y) = \frac{r-2}{2}\cdot\frac{U_n(y,z)-U_n(z,y)}{z-y},$$

$$(47.) \quad M(z,y) = \frac{1}{2}\frac{[(r-1)z+(r+1)y]U_n(y,z)-[(r+1)z+(r-1)y]U_n(z,y)}{z-y}.$$

Nach den Formeln (44.), (45.), (46.) und (47.) sieht man ein, daß eine solche ganze Zahl c und eine solche von n unabhängige positive Größe a existieren, daß sämtliche Koeffizienten von $cA_n(x)$ und $cB_n(x)$ ganze Zahlen werden, während der Modulus jedes dieser Koeffizienten kleiner als a^n wird**).

Daß ferner auch eine solche von n unabhängige positive Größe b existiert, daß der Modulus jedes Koeffizienten von $cC_n(x)$ kleiner als b^n wird,

---

*) Siehe die oben zitierte Abhandlung 2. S. 10—11.

**) Siehe die soeben genannte Abhandlung S. 21—24. Man muß hier auf einige Druckfehler aufmerksam sein, die sich eingeschlichen haben.

leuchtet sogleich ein, wenn wir bemerken, daß:

$$C_n(x)=\frac{W^{(2n+1)}(\varrho)}{(2n+1)!}+\frac{W^{(2n+2)}(\varrho)}{(2n+2)!}(x-\varrho)+\frac{W^{(2n+3)}(\varrho)}{(2n+3)!}(x-\varrho)^2+\cdots,$$

wo

$$W(x)=\varrho A_n(x)-B_n(x).$$

Wir bemerken daß:

$$\frac{Q_n}{P_n}=\frac{B_n}{A_n}=\frac{\psi_n}{\varphi_n}.$$

3. Durch Anwendung unseres Theorems kann man Näherungswerte einer positiven Wurzel ϱ von $F(x)$ auf folgende Weise finden:

Sind p und q beliebige positive ganze Zahlen, so erhält man aus (10.):

$$\varrho\left[q^{rn+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)\right]-\left[q^{rn+1}B_n\left(\frac{p}{q}\right)\right]=(p-\varrho q)^{2n+1}\left[q^{(r-2)n}C_n\left(\frac{p}{q}\right)\right].$$

Sind außerdem p und q so gewählt, daß

$$p-q\varrho=\frac{\varepsilon}{q}, \tag{48.}$$

$$0<|\varepsilon|<1, \tag{49.}$$

und setzt man

$$cq^{rn+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)=D_n, \tag{50.}$$

$$cq^{rn+1}B_n\left(\frac{p}{q}\right)=E_n, \tag{51.}$$

so werden D_n und E_n solche ganze Zahlen, daß

$$|\varrho D_n-E_n|<\delta^n q^{(r-4)n-1}, \tag{52.}$$

wo δ eine von n, p und q unabhängige positive Größe bedeutet, während

$$|D_n|<\gamma^n q^{rn+1} \tag{53.}$$

und

$$|E_n|<\gamma^n q^{rn+1}, \tag{54.}$$

wo γ eine andere von n, p und q unabhängige Größe ist.

Ferner kann man eine solche von n, p und q unabhängige dritte positive Größe θ bestimmen, daß

$$|D_n|>\theta^n q^{rn+1}, \tag{55.}$$

wenn q in (48.) größer als eine bestimmbare positive Größe ζ gewählt ist.

Wenn nämlich q hier größer als eine gewisse Größe ζ ist, kann man ja solche positiven Größen f und g finden, daß

$$\left| q^r \frac{H\left(\frac{p}{q}\right)}{r} \right| > f q^r, \quad \left| q^r F\left(\frac{p}{q}\right) \right| < g q^{r-2}.$$

ζ kann folglich nach (8.) auch so groß gewählt sein, daß

$$\left| q^{rn+1} A_n\left(\frac{p}{q}\right) \right| > s \left| q^{r(n-1)+1} A_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) \right| q^r,$$

wo s nicht mit n, p und q variiert, wenn $q > \zeta$. Wir erhalten also

$$\left| q^{rn+1} A_n\left(\frac{p}{q}\right) \right| > s^n q^{rn+1} |A_0|.$$

Hierdurch ist die Relation (55.) bewiesen.

Ist ϱ nicht reell, so kann man natürlich gleichfalls unser Verfahren benutzen.

Zuletzt merken wir uns die folgenden Sätze über die Funktionen $A_m(x)$ und $B_m(x)$: Aus (23.) und (24.) erhält man die Gleichungen

$$U(x) A'_{n+1}(x) = [r(n+1)+1]\left[\frac{1}{2} U'(x) A_{n+1}(x) + F(x) A_n(x)\right],$$

$$U(x) B'_{n+1}(x) = [r(n+1)+1]\left[\frac{1}{2} U'(x) B_{n+1}(x) + F(x) B_n(x)\right].$$

Hieraus und aus (8.) und (9.) erhält man ferner:

$$A_{n+1} = \frac{\left[(2n+1) U F' - \frac{r(n+1)-1}{2} U' F\right] A_n - U F A'_n}{\lambda[r(n+1)-1]},$$

$$B_{n+1} = \frac{\left[(2n+1) U F' - \frac{r(n+1)-1}{2} U' F\right] B_n - U F B'_n}{\lambda[r(n+1)-1]},$$

Aus den letzten vier Gleichungen bekommt man:

$$\frac{n(nr+1)}{r-1} F'' A_n - 2n F' A'_n + F A''_n = 0,$$

$$\frac{n(nr+1)}{r-1} F'' B_n - 2n F' B'_n + F B''_n = 0.$$

Aus (8.), (9.), (10.) und den letzten zwei Gleichungen erhält man die folgenden:

$$C_{n+1}=\frac{(2n+1)HC_n-(rn+1)\left[\frac{F}{x-\varrho}\right]^2 C_{n-1}}{\lambda[r(n+1)-1](x-\varrho)^2},$$

$$\left[\frac{n(nr+1)}{r-1}F''-2n(2n+1)\frac{d}{dx}\left[\frac{F}{x-\varrho}\right]\right]C_n-\left[2nF'-2(2n+1)\frac{F}{x-\varrho}\right]C_n' + FC_n''=0.$$

4. Wir wollen endlich die Gleichung (1.) etwas genauer studieren.

Bedeutet r eine beliebige ganze positive Zahl und $U(x)$ eine beliebige ganze Funktion von x vom zweiten Grade, dann kann man immer solche ganzen Funktionen $F(x)$ vom Grade r in x bilden, daß

$$(56.)\quad U(x)F''(x)-(r-1)U'(x)F'(x)+\frac{r(r-1)}{2}U''(x)F(x)=0.$$

Setzt man nämlich:

$$(57.)\qquad W(x)=U(x)F''(x)-(r-1)U'(x)F'(x)+\frac{r(r-1)}{2}U''(x)F(x),$$

so bekommt man für jede ganze positive Zahl n:

$$(58.)\qquad W^{(n)}(x)=U(x)F^{(n+2)}(x)+(n-r+1)U'(x)F^{(n+1)}(x) + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}U''(x)F^{(n)}(x).$$

Sind nun z. B. $F(0)$ und $F'(0)$ beliebig gegeben und bestimmt man dann $F''(0)$, $F'''(0)$, $\ldots F^{(r)}(0)$ so, daß sie den Gleichungen

$$W(0)=0,\ W'(0)=0,\ \ldots W^{(r-2)}(0)=0$$

Genüge leisten, so bekommt man auch

$$W^{(r-1)}(0)=0 \quad \text{und} \quad W^{(r)}(0)=0.$$

Für alle Werte von x wird also dann

$$W(x)=0.$$

Genügen die Koeffizienten einer ganzen $F(x)$ vom Grade r den $r-3$ Gleichungen:

$$(59.)\quad \begin{vmatrix} F^{(p+2)}(0) & (p-r+1)F^{(p+1)}(0) & (p-r)(p-r+1)F^{(p)}(0) \\ F^{(p+3)}(0) & (p-r+2)F^{(p+2)}(0) & (p-r+1)(p-r+2)F^{(p+1)}(0) \\ F^{(p+4)}(0) & (p-r+3)F^{(p+3)}(0) & (p-r+2)(p-r+3)F^{(p+2)}(0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(p=0,1,2,\ldots,(r-4)$$

und sind die Koeffizienten einer ganzen Funktion zweiten Grades $U(x)$ oder $U(0)$, $U'(0)$ und $U''(0)$ so bestimmt, daß

$$W(0)=0 \quad \text{und} \quad W'(0)=0,$$

so muß auch sein:

$$W''(0)=W'''(0)=\cdots=W^{(r-2}(0)=0$$

oder

$$W(x)=0.$$

Ist $F(x)$ so gewählt, daß $U''(x)=0$, so erhält man

(60.) $$U(x)F''(x)=(r-1)U'(x)F'(x) \quad \text{oder} \quad F(x)=a(px+q)^r+b,$$

wo a, b, p und q Konstanten sind.

Ist dagegen $U(x)$ vom zweiten Grade, so erhalten wir aus (58.) für $n=0$ und $n=1$:

(61.) $$\frac{U}{U''}[(r-2)F''^2-(r-1)F'F''']=\frac{(r-1)(r-2)}{2}[(r-1)F'^2-rFF''],$$

(62.) $$\frac{U'}{U''}[(r-2)F''^2-(r-1)F'F''']=\frac{r-1}{2}[(r-2)F'F''-rFF'''].$$

Für den Fall $r=1$ gilt (1.) für jede Funktion U. Für den Fall $r=2$ kann man setzen

$$U=F'.$$

Sollen

$$(r-2)F''^2=(r-1)F'F'''$$

und

$$(r-1)F'^2=rFF''$$

und also auch

$$(r-2)F'F''=rFF'''$$

sein, so findet dies statt dann und nur dann, wenn

(63.) $$F(x)=[ax+b]^r,$$

wo a und b Konstanten sind.

Sehen wir von diesen Fällen ab und setzen wir

(64.) $$(r-2)F''^2-(r-1)F'F'''=\alpha(x),$$

(65.) $$(r-1)F'^2-rFF''=\beta(x),$$

(66.) $$(r-2)F'F''-rFF'''=\beta'(x),$$

so erhalten wir aus (61.) und (62.), indem $r>2$:

$$U(x)=\frac{(r-1)(r-2)}{2}U''(x)\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \tag{67.}$$

$$U'(x)=\frac{r-1}{2}U''(x)\frac{\beta'(x)}{\alpha(x)}, \tag{68.}$$

oder

$$(r-2)\frac{d}{dx}\left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=\frac{\beta'(x)}{\alpha(x)}=(r-2)\frac{\alpha(x)\beta'(x)-\alpha'(x)\beta(x)}{\alpha^2(x)},$$

oder

$$(r-3)\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}=(r-2)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)},$$

$$[\alpha(x)]^{r-2}=k[\beta(x)]^{r-3}, \tag{69.}$$

wo k eine Konstante bedeutet. Ferner erhalten wir

$$r\alpha F-(r-1)\beta' F'+(r-2)\beta F''=0. \tag{70.}$$

Genügt umgekehrt $F(x)$ der Gleichung (69.), wo k eine Konstante bedeutet, so muß eine solche ganze Funktion $U_0(x)$ vom Grade 2 existieren, daß

$$\alpha(x)=k[U_0(x)]^{r-3}, \tag{71.}$$

$$\beta(x)=k[U_0(x)]^{r-2}. \tag{72.}$$

Ist $F(x)=ax^r+bx^{r-1}+cx^{r-2}+\cdots$, so bekommt man:

$$\beta(x)=[(r-1)b^2-2rac]x^{2r-4}+\cdots,$$

$$\alpha(x)=(r-1)(r-2)[(r-1)b^2-2rac]x^{2r-6}+\cdots$$

oder

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=U_0(x)=\frac{1}{(r-1)(r-2)}x^2+px+q$$

oder

$$U_0''(x)=\frac{2}{(r-1)(r-2)}. \tag{73.}$$

Diese Gleichung (73.) kann man auch aus (70.), (71.) und (72.) direkt ableiten. Setzt man:

$$U(x)=hU_0(x), \tag{74.}$$

wo h eine beliebige Konstante bedeutet, so wird infolge (67.), (68.), (70.) und (73.) der Gleichung (56.) durch $U(x)$ und $F(x)$ genügt.

Zuletzt ein paar Bemerkungen: Wird der Gleichung

$$\varrho A_n(x) - B_n(x) = (x-\varrho)^{2n+1} C_n(x)$$

von ganzen Funktionen A_n, B_n und C_n genügt, so kann der Grad von A_n und B_n nicht kleiner als $rn+1$ sein. $A_n B_n' - A_n' B_n$ ist nämlich durch $F^{2n}(x)$ teilbar.

Sollen hier ferner z. B. A_1 und B_1 von dem Grade $r+1$ sein, so sieht man leicht ein, daß eine ganze Funktion $U(x)$ zweiten Grades existieren muß, die der Gleichung (1.) Genüge leistet.

Grenzwerte von *Dirichlet*schen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze.

Von Herrn *Konrad Knopp* in Nagasaki.

Einleitung.

In einer Reihe neuerer Arbeiten*) wird das Verhalten von Potenzreihen studiert, wenn sich die Variable dem Rande des Konvergenzkreises nähert. Insbesondere sind hinreichende Bedingungen dafür aufgesucht worden, daß sich der Summenwert der Reihe dabei einem Grenzwert nähert. Diese Art Sätze sind zu einer gewissen Abrundung gekommen durch die Arbeit des Herrn *Pringsheim* „Über die Divergenzcharaktere gewisser Potenzreihen“**), in der für sehr allgemeine Fälle aus dem Verhalten der als Funktion von n betrachteten Summe der ersten n Koeffizienten auf dasjenige der Reihe selbst geschlossen wird, wenn sich die Variable in gewisser Weise dem Randpunkte nähert.

*) *Appell*, Sur certaines séries ordonnées par rapport . . . . [Comptes rendus de l' Académie des Sciences. Paris. T. LXXXVII (2. sémestre 1878). S. 689—690].

Frobenius, Über die *Leibniz*sche Reihe. [Dieses Journal. Bd. 89 (1880). S. 262—264].

Hölder, Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, [Mathematische Annalen, Bd. XX (1882), S. 535.]

Franel, Sur la théorie des séries, [Mathematische Annalen, Bd. LII (1898), S. 529.]

Lasker, Über Reihen auf der Konvergenzgrenze, [London Philosophical Transactions, vol. 196 (1902), S. 433].

Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, [Inaugural-Dissertation, Berlin (1907), S. 1—50]; — und andere.

**) Acta mathematica, Bd. XXVIII (1904), S. 1—30.

Die meisten dieser Arbeiten nehmen ihren Ausgangspunkt von *Abel*s bekannten „Untersuchungen über das Verhalten der Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$“*), in der zum ersten Male eine Betrachtung der in Rede stehenden Art gemacht wird.

Eine wesentliche Förderung erhielten diese Untersuchungen indessen erst durch einen Satz, der in seiner einfachsten Form schon von *Cesàro***) bewiesen worden ist und der folgendermaßen lautet:

Satz I. „*Sind*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

zwei Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 1 *und mit positiven Koeffizienten, für die*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

divergieren, existiert ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$$

als ein endlicher bestimmter Wert, so ist auch

$$\lim_{\varrho=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varrho^n} = g,$$

wenn die positive Zahl ϱ *sich wachsend dem Werte* $+1$ *nähert*“.

Denn dieser Satz gestattet offenbar, neue Reihentypen mit solchen von bekanntem Verhalten zu vergleichen und so zu neuen Sätzen zu gelangen.

Im wesentlichen auf einer Erweiterung dieses Satzes fußend, hat Herr *Pringsheim* seine sehr weitgehenden Sätze bewiesen.

In enger Anlehnung an diese Abhandlung des Herrn *Pringsheim* habe ich nun in meiner Arbeit***) „Über die Divergenzcharaktere gewisser *Dirichlet*scher Reihen“ versucht, die analogen Sätze für *Dirichlet*sche Reihen aufzustellen, und bin dadurch zu einer Reihe von Sätzen über das Ver-

*) Dieses Journal, Bd. 1 (1826), S. 317.

**) Démonstration d'un théorème de M. *Appell*, [Mathesis, 1893, S. 241].

***) Acta mathematica; die Publikation dieser Arbeit hat sich leider etwas verzögert, so daß sie erst etwa gleichzeitig mit der vorliegenden erscheinen wird.

halten dieser Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze gelangt, die zum Teil neu, zum Teil und auf ganz verschiedenen Wegen schon von anderen Autoren*) bewiesen worden sind. Weder mit meinen damaligen Methoden noch mit denen der anderen Autoren scheint es indessen möglich, den Sätzen über *Dirichlet*sche Reihen eine gleiche Vollständigkeit und Abrundung zu geben, wie dies bei den Sätzen über Potenzreihen in der genannten Arbeit des Herrn *Pringsheim* geschehen ist. Kurz ausgedrückt ist der Unterschied dieser: Während es möglich war, das Verhalten der Reihe dann anzugeben, wenn sie in der Nähe des Grenzpunktes sich wie

$$C\left(\frac{1}{1-x}\right)^c \quad \text{oder wie} \quad C\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^c$$

in der Nähe des Punktes $+1$ verhalten, war es nicht möglich, beides zu vereinigen und also das Verhalten dann anzugeben, wenn die Reihe sich wie

$$C\left(\frac{1}{1-x}\right)^a\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^b$$

oder allgemeiner wie

$$C\left(\frac{1}{1-x}\right)^a\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{b_1}\left(\log\log\frac{1}{1-x}\right)^{b_2}\cdots$$

in der Nähe des Punktes $+1$ verhält, wie dies von Herrn *Pringsheim* für Potenzreihen durchgeführt worden ist.

Im folgenden soll diese Lücke durch einen Satz ausgefüllt werden, der diese Sätze nicht ab ovo neu beweist, sondern der zeigt, daß in gewissen sehr allgemeinen Fällen eine Potenzreihe und eine *Dirichlet*sche Reihe das gleiche Verhalten bei der Annäherung an einen Randpunkt des Konvergenzgebietes haben. Ich werde nämlich zeigen, daß unter gewissen Bedingungen eine Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

mit dem Konvergenzradius 1 bei der Annäherung von x an die Stelle $+1$ dasselbe Verhalten zeigt wie eine *Dirichlet*sche Reihe

---

*) *Hölder*, a. a. O., ferner

Cahen, Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et sur des fonctions analogues [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, sér. III, Bd. XI (1894) p. 75—164], p. 86—87.

Schnee, Über irreguläre Potenzreihen und *Dirichlet*sche Reihen [Inaugural-Dissertation, Berlin (1908) S. 1—80], S. 29—59; — und andere.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$$

mit der Grenzgeraden $\Re(x)=0$ bei der Annäherung an die Stelle 0, wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{A(e^n)}{B(n)} = \lim_{n=\infty} \frac{A(n)}{B(\log n)} = 1$$

ist. Hierbei bedeuten $A(n)$ und $B(n)$ Funktionen, die für ganzzahlige Werte des Argumentes mit

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

und

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

übereinstimmen.

Diese Beweismethode scheint mir auch darum einen selbständigen Wert zu haben, weil sie nicht, wie die bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand, analog wie bei den Potenzreihen vorgeht, sondern weil sie einen direkten Zusammenhang zwischen beiden Arten von Reihen aufdeckt, wie dies schon ein früherer Satz von mir*) über „Nichtfortsetzbare *Dirichlet*sche Reihen“ tut.

Ich werde nun in § 1 den angedeuteten Satz präzisieren und beweisen und in § 2 daraus die in Rede stehenden Sätze herleiten.

§ 1.

Es sei die Potenzreihe

$$(1.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}$$

für $|x|>1$ und die *Dirichlet*sche Reihe

$$(2.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$$

für $\Re(x)>1$ konvergent. Bei der angewendeten Schreibweise haben die Konvergenzgebiete beider die Halbebene $\Re(x)>1$ und den Randpunkt $+1$ gemeinsam; ich ziehe von diesem aus zwei Strahlen, die den Kreis $|x|=1$ nicht berühren und ganz außerhalb desselben liegen. Jede Annäherung an den Punkt $+1$, die wir im folgenden betrachten, erfolge in dem von diesen Strahlen eingeschlossenen „*Winkelraum* Δ“. Im Gegensatz zu der längs der

*) Mathematische Annalen; auch diese Arbeit wird erst etwa gleichzeitig mit der vorliegenden erscheinen.

Achse des Reellen erfolgenden „reellen Annäherung", möge die eben beschriebene auch kurz als „komplexe Annäherung" bezeichnet werden.

Ist die Reihe (1.) so beschaffen, daß für reelle Annäherung an $+1$

$$\lim_{\varrho=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varrho^{-n} \right| = +\infty \tag{3.}$$

ist, so braucht doch nicht gleichzeitig auch bei komplexer Annäherung

$$\lim_{x=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} \right| = +\infty \tag{4.}$$

zu sein, — nicht einmal, wenn alle b_n positiv sind, wie Herr *Pringsheim**) an einfachen Beispielen gezeigt hat. Um die Gültigkeit von (4.) zu erzwingen, muß man also die Koeffizienten b_n gewissen Einschränkungen unterwerfen, z. B. der, daß bei gleichzeitiger Divergenz von $\Sigma|b_n|$ für alle innerhalb Δ hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Punkte x die Bedingung

$$\frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x^{-n}|} \geqq \beta \tag{5.}$$

für eine gewisse positive Zahl β erfüllt ist, die nur von der Öffnung des Winkelraumes Δ abhängt. Diese Bedingung**) besagt offenbar, daß der Betrag der Reihe $\Sigma b_n x^{-n}$ bei der Annäherung an $+1$ längs irgendeines in Δ verlaufenden Weges von nicht kleinerer Ordnung unendlich wird als bei der Annäherung längs der reellen Achse. Erfüllt (1.) eine solche Bedingung, so muß mit (3.) offenbar auch (4.) bestehen. Nach Herrn *Pringsheim* wollen wir sagen, daß eine solche Potenzreihe, die also für

---

*) a. a. O., S. 5.

**) Es liegt im Sinne dieser Definition, daß eine Bedingung der Form (5.) für *jeden* Winkelraum Δ erfüllt ist, solange dessen Schenkel nur je einen unterhalb $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Winkel mit der Achse des Reellen bilden. Ist also Δ' ein solcher Winkelraum mit größerer Öffnung als Δ, so soll eine Zahl $\beta' > 0$ existieren, so daß für alle innerhalb Δ' hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Werte von x

$$\frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x^{-n}|} \geqq \beta'$$

ist.

alle innerhalb Δ hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Punkte x eine Bedingung der Form (5.) erfüllt und für die $\Sigma|b_n|$ divergiert, *bei* $x=+1$ *gleichmäßig divergiere.* Ebenso heiße die *Dirichlet*sche Reihe (2.) bei $x=+1$ *gleichmäßig divergent,* wenn $\Sigma|a_\nu|$ divergiert und wenn eine Zahl $\alpha>0$ existiert, so daß für alle eben genannten x

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}\geqq\alpha \tag{6.}$$

bleibt.

Dies vorausgeschickt können wir nun den in der Einleitung angedeuteten Satz zunächst folgendermaßen aussprechen:

Satz II. „*Es sei*

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{-n} \tag{7.}$$

eine für $|x|>1$ *konvergente Potenzreihe mit positiven Koeffizienten, die bei* $x=+1$ *im Sinne von* (5.) *gleichmäßig divergiert und für die* Σb_n *divergiert. Hat dann die Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \tag{8.}$$

positive Koeffizienten, für die

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n}a_\nu}{b_n}=g^*) \tag{9.}$$

ist, so konvergiert sie für $\Re(x)>1$, *divergiert gleichmäßig***) *bei* $x=+1$, *und es ist*

$$\lim_{x=1}\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{-n}}=g \tag{10.}$$

für jede Annäherung im Winkelraum Δ, *wenn nur*

---

*) Sind die Grenzen der Summation gebrochene Zahlen, so soll der Summationsbuchstabe alle in dem betreffenden Intervall gelegenen ganzen Zahlen durchlaufen.

**) Dies findet nur statt, falls $g\neq 0$ ist, während die andern Behauptungen auch für $g=0$ bestehen bleiben. Auf diese leichte Modifikation gehe ich nicht näher ein und nehme im folgenden stets an, daß g von 0 verschieden ist.

(11.) $$\lim_{n=\infty} \frac{n b_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = 0 \quad (B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

ist).*"

Beweis: Bleibend für das Folgende setze ich

$$\sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} a_\nu = c_n, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

so daß die Voraussetzung (9.) lautet:

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{b_n} = g.$$

Hieraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{-n}$$

denselben Konvergenzbereich hat wie (7.), und daß also

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}$$

für $\Re(x) > 1$ konvergiert. Da nun für positive $x > 1$

$$c_n (e^{x-1})^{-n} = \frac{c_n}{(e^n)^{x-1}} \leqq \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \leqq \frac{c_n}{(e^{n-1})^{x-1}} = c_n (e^{x-1})^{-n} \cdot e^{x-1}$$

ist, so folgt sofort, daß (8.) für reelle $x > 1$, also auch für alle $\Re(x) > 1$ konvergiert, und es ist überdies für positive $x > 1$

---

*) Diese Nebenbedingung ist in sehr allgemeinen Fällen erfüllt; denn bei einigermaßen regelmäßigem Verhalten und nicht zu starkem Wachstum der b_n wird schon $\limsup_{n=\infty} \frac{n b_n}{B_n}$ endlich und also a fortiori (11.) erfüllt sein. — Da übrigens die B_n monoton wachsen, so ist

$$\frac{n b_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} \geqq \frac{n b_n}{n B_n} = \frac{b_n}{B_n};$$

es ist also mit (11.) auch

(α) $$\lim_{n=\infty} \frac{b_n}{B_n} = 0,$$

und aus

$$\frac{B_{n-1}}{B_n} = \frac{B_n - b_n}{B_n} = 1 - \frac{b_n}{B_n}$$

folgt, daß unter der Voraussetzung (11.) auch

(β) $$\lim_{n=\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n} = 1$$

ist.

$$(12.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \leqq e^{x-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}.$$

Um nun (10.) zu beweisen, werde ich zeigen, daß für jede Annäherung innerhalb Δ

$$(a.)\qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}} = 1$$

und daß

$$(b.)\qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{b_n} = g$$

ist, womit offenbar der Beweis von (10.) geliefert wäre.

Beweis von (a.). Ich werde den Beweis der mit (a.) identischen Beziehung

$$(13.)\qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}} = 0$$

liefern. Für

$$e^{n-1} \leqq \nu < e^n$$

ist nun

$$(14.)\qquad \nu = e^{n-\vartheta_\nu} \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta_\nu \leqq 1$$

und also

$$(15.)\qquad n = [\log \nu] + 1.$$

Durch (14.) und (15.) sollen n und ν in den folgenden Beziehungen verbunden gedacht werden. Dann kann aber der Zähler von (13.) geschrieben werden in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (e^{n-\vartheta_\nu})^{1-x} - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (e^n)^{1-x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left\{ e^{(n-\vartheta_\nu)(1-x)} - e^{n(1-x)} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{(n-\vartheta_\nu)(1-x)} \left\{ 1 - e^{\vartheta_\nu (1-x)} \right\},$$

so daß dieser Zähler seinem Betrage nach kleiner ist als

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{(n-\vartheta_\nu)(1-\Re(x))} \left| 1 - e^{\vartheta_\nu (1-x)} \right|.$$

Nun ist aber

$$|1-e^{\vartheta_\nu(1-x)}| = |1-1-\vartheta_\nu(1-x)-\frac{\vartheta_\nu^2(1-x)^2}{1\cdot 2}-\cdots| \leqq \vartheta_\nu |x-1| \frac{1}{1-|x-1|} \leqq 2|x-1|$$

für alle hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Werte von x. Also ist der Betrag jenes Zählers

$$\leqq 2|x-1| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \nu^{1-\Re(x)},$$

und es ist daher

$$\left| \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}} \right| \leqq 2|x-1| \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}\right|};$$

dies ist wiederum

$$\leqq 2|x-1| \frac{1}{\gamma} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n (e^{x-1})^{-n}|}, \tag{16.}$$

wo γ eine gewisse positive Konstante bedeutet, die der für alle innerhalb Δ hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Werte von x gültigen Beziehung

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n (e^{x-1})^{-n}|} \geqq \gamma > 0 \tag{17.}$$

entnommen ist. (17.) selbst aber ist eine leichte Folgerung aus der mit (5.) gleichwertigen Beziehung

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n (e^{x-1})^{-n}|} \geqq \beta' > 0 \text{*)} \tag{18.}$$

in Verbindung mit der Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{b_n} = g. \text{**)}$$

---

*) In der Tat erfüllen die Punkte $y = e^{x-1}$, wenn x in Δ liegt, einen krummlinigen Winkel, dessen Schenkel diejenigen des Winkelraumes Δ bei $+1$ berühren. Liegt also x hinreichend nahe an $+1$ in Δ, so sind alle entsprechenden Bildpunkte y sicher in einem Winkelraum Δ' mit etwas, übrigens beliebig wenig größerer Öffnung enthalten. Dann aber begründet Anm. **) von S. 113 die Gültigkeit der obigen Beziehung.

**) Folgerungen der hier angedeuteten Art sind in den S. 109 zitierten Arbeiten so häufig durchgeführt, daß ich mich hier kurz fassen zu dürfen glaube.

Da endlich nach (12.) für *reelle* Annäherung

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}} = 1 \tag{19.}$$

ist, so folgt aus (16.), wo die Annäherung ja nun wegen $|e^u| = e^{\Re(u)}$ eine reelle ist, die Gültigkeit von (13.), womit der Beweis von (a.) geliefert ist.

Beweis von (b.). Setzt man hier

$$c_n = g b_n + \varepsilon_n b_n,$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

und

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} - g \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}}. \tag{20.}$$

Hieraus erkennt man, daß es zum Beweise von (b.) genügen würde, zu zeigen, daß für komplexe Annäherung

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = 1 \tag{21.}$$

ist; denn dann wäre der um g verminderte Grenzwert (b.) gleich dem Grenzwert der rechten Seite von (20.) und also gleich demjenigen von

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}.$$

Dieser ist aber in der Tat gleich 0; denn der Betrag dieses letzten Quotienten ist

$$\leqq \frac{\left|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n b_n (e^{x-1})^{-n}\right|}{\left|\sum b_n (e^{x-1})^{-n}\right|} + \bar{\varepsilon}_m \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n (e^{x-1})^{-n}|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}\right|}, \tag{22.}$$

wo $\bar{\varepsilon}_m$ die ihrem Betrage nach größte unter den Größen $\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \ldots$ bedeutet. Da nun mit (5.) auch (vgl. S. 113. Anm. **))

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n (e^{x-1})^{-n}|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}\right|} \leqq \frac{1}{\beta'} \qquad (\beta' > 0) \tag{23.}$$

ist, so erkennt man, daß (22.) und also auch (20.) durch geeignete Wahl von m und x beliebig klein gemacht werden können, d. h. daß sie den Grenzwert 0 haben; denn für den zweiten Summanden folgt dies aus (23.) in Verbindung mit $\lim_{m=\infty} \bar{\varepsilon}_m = \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, und in dem ersten Summanden bleibt bei festgehaltenem m der Zähler unterhalb einer endlichen Schranke, während der Nenner durch Wahl von x beliebig groß gemacht werden kann.

Es genügt also statt (b.) die Gültigkeit von (21.) zu beweisen. Für die Punkte x des Winkelraumes Δ ist nun teils

$$\left|\frac{x}{e^{x-1}}\right| \leqq 1, \tag{24.}$$

teils

$$\left|\frac{e^{x-1}}{x}\right| \leqq 1. \tag{25.}$$

Im ersten Falle hat man

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n [x^{-n} - (e^{x-1})^{-n}]}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} \left[1 - \left(\frac{x}{e^{x-1}}\right)^n\right]}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}},$$

und da nun für $|u| \leqq 1$

$$|1 - u^n| \leqq n\,|1 - u|$$

ist, da ferner

$$1 - \frac{x}{e^{x-1}} = (x-1)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{3} + \cdots\right)$$

ist, so ist für alle hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Punkte x in Δ

$$\left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} - 1\right| \leqq \frac{|(x-1)^2| \sum_{n=1}^{\infty} |n b_n x^{-n}|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}\right|}$$

oder nach (5.)

$$\leqq \frac{1}{\beta} \frac{|(x-1)^2| \sum_{n=1}^{\infty} |n b_n x^{-n}|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x^{-n}|} = \frac{|x|^2}{\beta \delta^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n b_n |x|^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) |x|^{-n}},$$

da für alle hier in Betracht gezogenen Werte von x

$$\frac{|x-1|}{|x|-1} \leqq \frac{1}{\delta} \quad (\delta > 0)^*)$$

und allgemein für $|x|>1$

$$\frac{1}{x-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) x^{-n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{-n}$$

und also

$$\frac{1}{(x-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) x^{-n}$$

ist.

Nach dem *Cesàro*schen Satz I in Verbindung mit der Voraussetzung (11.) ist aber

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n b_n |x|^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) |x|^{-n}} = 0, \tag{26.}$$

und man kann daher für alle der Ungleichung (24.) genügenden x

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = 1 + \varepsilon(x) \tag{27.}$$

setzen, wo $\varepsilon(x)$ seinem Betrage nach beliebig klein wird, wenn nur x in Δ hinreichend nahe an $+1$ liegt.

Für alle der Ungleichung (25.) genügenden x hat man entsprechend

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n} \left[1 - \left(\frac{e^{x-1}}{x} \right)^n \right]}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}} \right|,$$

also wie oben in Verbindung mit (18.)

$$\leqq \frac{1}{\beta'} |x-1|^2 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |n b_n (e^{x-1})^{-n}|}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n |(e^{x-1})^{-n}|} \leqq \frac{1}{\beta' \delta'^2} \frac{(\Re(x)-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (e^{\Re(x)-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{\Re(x)-1})^{-n}},$$

da für alle hier in Betracht gezogenen Werte von x

$$\frac{|x-1|}{\Re(x)-1} \leqq \frac{1}{\delta'} \quad (\delta' > 0)$$

---

*) s. *Pringsheim*, a. a. O. S. 4.

ist. Hieraus erkennt man ohne Schwierigkeit, daß auch in diesem Falle eine Beziehung der Form (27.) besteht.

Diese hat also für *alle* in Δ hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Werte von x Gültigkeit, d. h. es ist für *jede* Annäherung innerhalb Δ

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{x-1})^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = 1, \tag{28.}$$

womit dann der Beweis von (b.) geliefert ist.

Daß endlich $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ bei $x=+1$ gleichmäßig divergiert, ergibt sich folgendermaßen:

Nach (19.) ist für alle hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Werte von x

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n (e^{x-1})^{-n}|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|} \geqq \frac{1}{2}; \tag{29.}$$

für dieselben Werte von x ist nach (17.)

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n (e^{x-1})^{-n}|} \geqq \gamma > 0 \tag{30.}$$

und nach (a.)

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{x-1})^{-n}\right|} \geqq \frac{1}{2}, \tag{31.}$$

woraus sich durch Multiplikation ergibt:

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|} \geqq \frac{\gamma}{4} = \alpha > 0;$$

dies besagt aber nach (6.), daß die Reihe $\Sigma \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ bei $x=+1$ gleichmäßig divergiert.

Der hiermit bewiesene Satz II läßt sich nun noch dadurch erweitern und für die Anwendungen handlicher machen, daß man an Stelle

der Voraussetzung (9.) die etwas allgemeinere setzt, in der im Nenner statt des n-ten Koeffizienten die Summe aller ersten n Koeffizienten auftritt. Man gelangt so zu dem

Satz III. Macht man in Satz II unter sonst gleichen Annahmen statt (9.) *die umfassendere Voraussetzung*

$$(32.)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{e^n} a_\nu}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = g$$

oder die dasselbe besagende) Voraussetzung*

$$(33.)\qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{b_1+b_2+\cdots+b_{[\log \nu]}} = g,$$

zu deren Erfülltsein (9.) *zwar stets hinreichend, aber nicht notwendig ist, so bleiben seine Behauptungen ebenfalls gültig.*

Beweis: Man hat bekanntlich

$$(34.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} = (x-1)\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^x} + (x-1)\,e(x), \qquad (A_\nu = a_1+a_2+\cdots+a_\nu),$$

wo $e(x)$ für alle x des Gebietes Δ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt; und da wegen (33.) mit Σb_n auch Σa_ν divergiert, so folgt, daß für *jede* Annäherung

$$(35.)\qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{(x-1)\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^x}} = 1$$

ist, ferner ist identisch

$$(36.)\qquad \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}}{(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{-n}} = \frac{1}{x}.$$

---

*) (32.) verlangt nicht, wie es scheinen möchte, weniger als (33.), denn aus (32.) folgt in Verbindung mit der Beziehung (β) in Anm. *) S. 115, daß $\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{B_n} = 0$; dann ist aber a fortiori für irgend zwei zwischen e^{n-1} und e^n gelegene ganze Zahlen $\varkappa$ und λ $(\lambda > \varkappa)$

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_\varkappa + a_{\varkappa+1} + \cdots + a_\lambda}{B_n} = 0,$$

woraus sich die Äquivalenz von (32.) und (33.) ergibt.

Ließe sich also beweisen, daß

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^x}}{\sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{-n}} = g \tag{37.}$$

ist, so wäre dadurch in Verbindung mit (35.) und (36.) auch die behauptete Beziehung (10.) bewiesen. Andererseits wäre (37.) eine unmittelbare Folge des Satzes II, wenn sich zeigen ließe, daß aus (32.) oder (33.), d. h. aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{[e^n]}}{B_n} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_{[\log \nu]}} = g \tag{38.}$$

folgte, daß auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{A_\nu}{\nu}}{B_n} = g \tag{39.}$$

ist. Dies ist nun in der Tat folgendermaßen leicht möglich:

Nach (38.) kann

$$A_\nu = g B_{[\log \nu]} + \varepsilon_\nu B_{[\log \nu]} \qquad \text{mit} \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

gesetzt werden, so daß

$$\sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{A_\nu}{\nu} = g \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{B_{[\log \nu]}}{\nu} + \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{\varepsilon_\nu B_{[\log \nu]}}{\nu} \tag{40.}$$

wird. Da aber für alle der Bedingung $e^{n-1} \leqq \nu < e^n$ genügenden ν

$$[\log \nu] = n-1$$

ist, so folgt aus (40.), daß

$$\frac{1}{B_n} \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{A_\nu}{\nu} = g \frac{B_{n-1}}{B_n} \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{1}{\nu} + \frac{B_{n-1}}{B_n} \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu}$$

ist. Wegen

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} \frac{1}{\nu} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

folgt aber hieraus die Beziehung (39.)

Daß auch in diesem Falle $\sum \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ bei $x = +1$ gleichmäßig divergiert, folgt wieder aus den Beziehungen (29.), (30.) und (31.), deren zweite

wieder leicht aus der gleichmäßigen Divergenz von $\Sigma b_n x^{-n}$ in Verbindung mit der neuen Voraussetzung (32.) gefolgert werden kann, während die erste und also auch die letzte unverändert bestehen bleiben. Hiermit ist der Satz III vollständig bewiesen. —

Endlich läßt sich noch die Annahme beseitigen, daß die Koeffizienten a_ν positiv sind. Denn ist unter sonst gleichen Annahmen für eine *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ mit beliebigen Koeffizienten die Voraussetzung (32.) oder (33.) erfüllt, so hat man zunächst

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\log|a_1+a_2+\cdots+a_\nu|}{\log \nu} = \limsup_{\nu=\infty} \frac{\log|b_1+b_2+\cdots+b_{[\log \nu]}|}{\log \nu}$$

$$= \limsup_{n=\infty} \log \sqrt[n]{b_1+b_2+\cdots+b_n} = \log 1 = 0,$$

da $\Sigma b_n y^n$ und also auch $\Sigma B_n y^n$ den Einheitskreis zum Konvergenzbereich haben. Hieraus folgt, daß die Reihe nach wie vor die Grenzgerade $\Re(x)=1$ hat. Definiere ich nun die positiven Zahlen a'_ν durch die Bedingungen

$$a'_1+a'_2+\cdots+a'_\nu = b_1+b_2+\cdots+b_{[\log \nu]},$$

so ist nach Satz III

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a'_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = 1, \tag{41.}$$

und die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a'_\nu}{\nu^{x-1}}$$

divergiert gleichmäßig bei $x=+1$. Da dann ferner

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{a'_1+a'_2+\cdots+a'_\nu} = g,$$

so ist nach dem in meiner oben zitierten Abhandlung ausführlich bewiesenen Analogon zu dem *Cesàro*schen Satz I

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a'_\nu}{\nu^{x-1}}} = g \tag{42.}$$

für jede Annäherung im Winkelraum Δ, und es divergiert auch $\Sigma \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ gleich-

mäßig bei $x=+1$; nach (41.) und (42.) ist dann also auch

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = g. \tag{43.}$$

Hiermit ist der Satz bewiesen, der nun vollständig so lautet:

Satz IV. Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}$$

eine für $|x|>1$ konvergente Potenzreihe mit positiven Koeffizienten), die bei $x=+1$ gleichmäßig divergiert, d. h. für alle hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Punkte x des Gebietes Δ die Bedingung*

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x^{-n}|} \geqq \beta > 0$$

erfüllt und für die $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert. Genügen dann die komplexen Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$$

der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{[e^n]}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{[\log \nu]}} = g,$$

*so konvergiert sie für $\Re(x)>1$, divergiert gleichmäßig**) bei $x=+1$, d. h. erfüllt für alle innerhalb Δ hinreichend nahe an $+1$ gelegenen Punkte x die Bedingung*

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|} \geqq \alpha > 0,$$

und es ist

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = g$$

---

*) Auch die Annahme $b_n>0$ läßt sich noch durch einfache Kunstgriffe beseitigen, doch bietet dies für die Anwendungen kein besonderes Interesse.

) s. S. 114, Anm.).

für jede Annäherung im Winkelraum Δ, wenn nur

$$\lim_{n=\infty} \frac{nb_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = 0 \qquad (B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

ist.

§ 2.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, lassen sich nun die im vorangehenden Paragraphen entwickelten Sätze insbesondere also der letzte, alle vorhergehenden als Spezialfälle umfassende Satz dazu verwenden, um einen aus der Theorie der Potenzreihen her bekannten Grenzwertsatz auf die der *Dirichlet*schen Reihen zu übertragen. Zu diesen Grenzwertsätzen rechne ich alle als Erweiterungen und Ausbau des *Abel*schen Grenzwertsatzes von den Herren *Frobenius, Appell, Hölder* u. a. hergeleiteten Sätze, die sämtlich durch den folgenden Satz des Herrn *Pringsheim* zusammengefaßt und nicht unbeträchtlich erweitert werden:

Satz V. Es sei $\lambda(r)$ eine positive mit r monoton ins Unendliche wachsende Funktion; ihr Wachstum sei indessen für jedes noch so kleine ε schließlich langsamer als dasjenige von

$$r^{\varepsilon},$$

es sei also von einer gewissen Stelle an

$$(44.) \qquad 1 < \frac{\lambda(r+1)}{\lambda(r)} < \left(\frac{r+1}{r}\right)^{\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, d. h. man habe

$$(45.) \qquad \frac{\lambda(r+1)}{\lambda(r)} = 1 + \frac{\varepsilon(r)}{r} \quad \textit{mit} \quad \lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Ist dann

$$(46.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n^p \cdot \lambda^{\alpha}(n)} = g,$$

wo entweder

$$p > 0 \quad \textit{und} \quad \alpha = +1,\ 0 \quad \textit{oder} \quad -1 \quad \textit{ist,}$$

oder

$$p = 0 \quad \textit{und dann} \quad \alpha = +1 \ \textit{ist,}$$

so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}$$

für $|x|>1$, *divergiert gleichmäßig bei* $x=+1$, *und es ist für jede Annäherung in* Δ

$$\lim_{x=1}(x-1)^p\,\lambda^{-a}\left(\frac{1}{|x-1|}\right)\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{-n}=g\,\Gamma(p+1). \tag{47.}$$

Daß dieser Satz tatsächlich alle bekannten Sätze dieser Art enthält, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, daß für $\lambda(r)$ u. a. jede Funktion des Typus

$$\lambda(r)=\log_m^q r\cdot\log_{m+1}^{q_1} r\cdots\log_{m+\varkappa}^{q_\varkappa} r$$

gesetzt werden kann, wo $\log_m r$ den m-fach iterierten Logarithmus bedeutet, $m\geqq 1$, $q>0$ ist und die übrigen Exponenten $q_\varkappa$ beliebige reelle Zahlen oder 0 sind; und wenn man ferner bedenkt, daß identisch

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\gamma+1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}S_n^{(\gamma)}x^{-n}$$

ist, wo die $S_n^{(\gamma)}$ die in den *Appell*schen Grenzwertsätzen auftretenden Summen sind, die also für ganzzahlige γ durch

$$S_n^{(0)}=b_1+b_2+\cdots+b_n,\quad S_n^{(\gamma)}=S_1^{(\gamma-1)}+S_2^{(\gamma-1)}+\cdots+S_n^{(\gamma-1)}\qquad(\gamma=1,2,\ldots)$$

und für beliebige positive γ durch die Identität

$$\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\gamma+1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n y^n=\sum_{n=1}^{\infty}S_n^{(\gamma)}y^n$$

definiert sind.

Auf Grund des Satzes IV ergibt sich nun hieraus unmittelbar, daß für eine *Dirichlet*sche Reihe $\Sigma\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ das Verhalten bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze bekannt ist, wenn die Koeffizienten einer Bedingung der Form

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{[\log\nu]^p\,\lambda^a([\log\nu])}=g \tag{48.}$$

genügen. Da aber

$$\lim_{n=\infty}\frac{[\log n]}{\log n}=1$$

und also a fortiori*) auch

---

*) In der Tat folgt aus den Definitionsgleichungen (44.) und (45.) der Funktion $\lambda(r)$ leicht, daß für jedes konstante $a>0$ sogar

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\lambda(ar)}{\lambda(r)}=1$$

ist.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda([\log n])}{\lambda(\log n)} = 1$$

ist, so ist die Bedingung (48.) mit

$$(49.) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu}{\log^p \nu \ \lambda^\alpha(\log \nu)} = g$$

gleichbedeutend. Der Schluß auf das Verhalten der Reihe ist indessen nach Satz IV nur dann hieraus gestattet, wenn die Koeffizienten b_n der zum Vergleich herangezogenen Potenzreihe die Bedingung

$$(50.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n b_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = 0$$

erfüllen. Da ich hierin für die b_n irgendwelche positive Zahlen nehmen kann, für die nur

$$(51.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n^p \cdot \lambda^\alpha(n)}$$

existiert, so wähle ich speziell

$$b_n = n^p \lambda^\alpha(n) - (n-1)^p \lambda^\alpha(n-1),$$

so daß b_n wegen (44.) von einer gewissen Stelle an sicher positiv ist und der Grenzwert (51.) existiert und gleich 1 ist. Man sieht dann leicht, daß auch (50.) erfüllt ist, denn es ist

$$\frac{n b_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = \frac{n[n^p \lambda^\alpha(n) - (n-1)^p \lambda^\alpha(n-1)]}{\lambda^\alpha(1) + 2^p \lambda^\alpha(2) + \cdots + n^p \lambda^\alpha(n)}$$

und also für $\alpha \geqq 0$

$$\leqq \frac{\lambda^\alpha(n) n^{p+1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \left(\frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)}\right)^\alpha\right]}{c n^{p+1}},$$

worin c (wie gleich nachher c') eine nur von p abhängige positive Konstante bezeichnet. Der letzte Ausdruck nähert sich aber wegen (44.) mit wachsendem n der Grenze 0. Für $\alpha \leqq 0$ hat man ähnlich

$$\frac{n b_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} \leqq \frac{\lambda^\alpha(n) n^{p+1} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \left(\frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)}\right)^\alpha\right]}{c' n^{p+1} \lambda^\alpha(n)} \leqq \frac{1}{c'} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right],$$

woraus wieder die Gültigkeit von (50.) abgelesen werden kann.

Setzt man endlich

$$\lambda(\log r) = \mu(r),$$

so ist $\mu(r)$ eine stetige, positive, monoton mit r ins Unendliche wachsende Funktion, deren Wachstum indessen schließlich kleiner ist als dasjenige von $\log^{\varepsilon} r$ für jedes noch so kleine positive ε, derart daß von einer gewissen Stelle an

$$(52.) \qquad 1 < \frac{\mu(r+1)}{\mu(r)} < \left(\frac{\log(r+1)}{\log r}\right)^{\varepsilon}$$

ist für jedes $\varepsilon > 0$ und daß also

$$(53.) \qquad \frac{\mu(r+1)}{\mu(r)} = 1 + \frac{\varepsilon(r)}{r \log r} \quad \text{mit} \quad \lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0$$

gesetzt werden kann.

Legt man eine solche Funktion zugrunde, so gilt nun der

Satz VI. Ist für die Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe

$$(54.) \qquad \Sigma \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$$

die Bedingung

$$(55.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\log^p n \cdot \mu^\alpha(n)} = g$$

erfüllt, in der entweder

$$p > 0 \text{ und dann } \alpha = +1, 0 \text{ oder } -1$$

oder

$$p = 0 \text{ und dann } \alpha = +1$$

ist, so konvergiert

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$$

für $\Re(x) > 1$, *divergiert gleichmäßig*) bei* $x = +1$, *und es ist für jede Annäherung im Winkelraum* Δ

$$(56.) \qquad \lim_{x=1} \left\{ (x-1)^p \mu^\alpha \left(\frac{1}{|x-1|}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \right\} = g\, \Gamma(p+1).$$

---

*) vgl. den Zusatz S. 114, Anm. **)

Für die Anwendungen dieses Satzes, zu denen wir nun noch kurz übergehen wollen, sind folgende vier Bemerkungen von Nutzen:

1. Da die Koeffizienten einer *Dirichlet*schen Reihe insofern unbestimmt sind, als man statt (54.) auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^s a_\nu}{\nu^{s-1+x}}$$

schreiben kann, so genügt es, wenn statt (55.) für irgendeinen bestimmten Wert von s eine Bedingung der Form

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + 2^s a_2 + \cdots + n^s a_n}{\log^p n \cdot \mu^a(n)} = g \tag{57.}$$

erfüllt ist, um auf das Verhalten der Reihe bei der Annäherung an die Randstelle, die dann $x=1-s$ ist, zu schließen.

2. Da, wie schon oben bemerkt,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \quad \text{und} \quad (x-1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^x}$$

bei der Annäherung an die Stelle $+1$ das gleiche Verhalten haben, so genügt es ersichtlich sogar, Beziehungen von der Form (55.) oder (57.) zu kennen, wenn in diesen a_ν durch A_ν ersetzt wird.

3. Geht man in dieser Richtung weiter und setzt

$$A'_\nu = A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu$$

und allgemein

$$A_\nu^{(\gamma)} = A_1^{(\gamma-1)} + A_2^{(\gamma-1)} + \cdots + A_\nu^{(\gamma-1)},$$

so haben auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \quad \text{und} \quad (x-1)x(x+1)\cdots(x+\gamma-1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+x}}$$

ein gleiches Verhalten bei der Annäherung an die Randstelle, und man sieht, daß es sogar genügt, Beziehungen der Form (55.) oder (57.) zu kennen, wenn in diesen a_ν durch $A_\nu^{(\gamma)}$ ersetzt wird. Die so entstehenden Voraussetzungen sind aber für jedes γ weiter als die entsprechenden für den Index $\gamma-1$.

4. Endlich sei noch hervorgehoben, daß in (56.) für $\mu(r)$ u. a. gesetzt werden kann

$$\mu(r) = \log_{m+1}^{q} r \cdot \log_{m+2}^{q_1} r \cdots \log_{m+\varkappa+1}^{q_\varkappa} r,$$

wo $\log_m r$ den m-fach iterierten Logarithmus bedeutet, $m \geqq 1$, $q > 0$ und $q_1, q_2, \dots q_\varkappa$ irgendwelche reellen Zahlen sind.

Setzen wir nun, um von den Anwendungen der Formel (56.) nur den wichtigsten Fall besonders hervorzuheben, dieses $\mu(r)$ in (56.) ein, so erhalten wir den Satz, der unter Benutzung der Bemerkungen 1.—3. u. a. alle bisher bekannten Sätze dieser Art als Spezialfälle enthält, der diesen eine Reihe neuer hinzufügt und der nun vollständig folgendermaßen lautet:

Satz VII. Genügen die Koeffizienten der Dirichletschen Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$$

der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{(\log n)^p \{\log_{m+1}^q n \cdot \log_{m+2}^{q_1} n \cdots \log_{m+\varkappa+1}^{q_\varkappa} n\}^\alpha} = g,$$

wo $m \geqq 1$, $\varkappa \geqq 0$ *ganze Zahlen, ferner* $p \geqq 0$, $q > 0$ *und die übrigen* q *beliebige reelle Zahlen sind, und wo falls*

$$p > 0 \text{ ist, } \alpha \text{ die Werte } +1,\ 0 \text{ oder } -1$$

und falls

$$p = 0 \text{ ist, } \alpha \text{ nur den Wert } +1$$

haben darf, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$$

für $\Re(x) > 1$, *divergiert gleichmäßig bei* $x = +1$, *und es ist für jede im Winkelraum* Δ *verlaufende Annäherung an die Stelle* $+1$

$$\lim_{x=1} (x-1)^p \left\{ \log_{m+1}^q \frac{1}{|x-1|} \cdot \log_{m+2}^{q_1} \frac{1}{|x-1|} \cdots \log_{m+\varkappa+1}^{q_\varkappa} \frac{1}{|x-1|} \right\}^\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} = g \cdot \Gamma(p+1)^*).$$

Zum Schluß sei nur noch hervorgehoben, daß für die verallgemeinerten *Dirichlet*schen Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$$

und für die Integrale der Form

---

*) In dieser Beziehung darf ersichtlich statt $|x-1|$ auch $(x-1)$ geschrieben werden.

$$J(s)=\int_1^\infty \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt,$$

die eine fast vollständige Analogie zu den *Dirichlet*schen Reihen zeigen, sich ganz analoge Sätze aufstellen und beweisen lassen, wodurch dann auch deren Verhalten direkt mit dem der Potenzreihen verglichen wird. Diese Andeutung mag genügen, um dem Leser, der dieser Sätze bedarf, die ganz parallel laufenden Entwicklungen zu ermöglichen.

Die Berechnung des Osterfestes.

Von Herrn *Adolf Fraenkel* in München.

Das Interesse an der mathematischen Behandlung der Aufgaben der Kirchenrechnung und überhaupt der technischen Chronologie, das zu Beginn des letzten Viertels des 18. Jahrhunderts erst eigentlich erwacht war*), hat vor allem in den ersten drei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts eine reiche Literatur über diesen Gegenstand hervorgerufen. Was das Hauptproblem betrifft, die Berechnung des Osterfestes im julianischen und im gregorianischen Kalender mittels rein arithmetischer Regeln, so steht hier obenan die *Gauß*sche Formel vom Jahre 1800 (Monatl. Corresp. f. Erd- u. Himmelskunde, Bd. 2, S. 121—130; *Gauß*' Werke, VI, S. 73—79) mit ihrem Nachtrag von 1816 (Ztschr. f. Astronomie u. verw. Wissenschaften, Bd. 1, S. 158; in *Gauß*' Werken nicht enthalten)**). Die besten mir bekannten Ableitungen***)

*) Vgl. *Lamberts* Aufsatz im Astron. Jahrb. f. 1778 Berlin, S. 210—226.

**) Die *Gauß*schen Regeln zur Berechnung des *julianischen* Osterfestes des Jahres A' lassen sich folgendermaßen ausdrücken: Bezeichnet man

den Rest der Division $\frac{A'}{19}$ mit a', den Rest der Division $\frac{A'}{4}$ mit b',

„ „ „ „ $\frac{A'}{7}$ „ c', „ „ „ „ $\frac{19a'+15}{30}$ mit d',

„ „ „ „ $\frac{2b'+4c'+6d'+6}{7}$ mit e',

so fällt der Ostersonntag auf März $22+d'+e'$.

***) Die früheren Ableitungen (wie überhaupt die ältere, auch gar manches recht wenig Wertvolle enthaltende Literatur über den ganzen Gegenstand) hat *F. Piper* mit großer Sorgfalt zusammengestellt (Dieses Journal, Bd. 22 [1841], S. 98—101); von den sehr zahlreichen seither erschienenen Ableitungen und Erklärungen nenne ich, ohne auf Vollständigkeit oder kritische Auswahl Anspruch zu machen, diejenigen von *F. v. Schmöger* (Grundriß d. christl. Zeit- u. Festrechn. [1854], S. 80—86), *R. Martin* (Comptes rendus de l'Acad. des sciences Paris, T. 41 [1855], p. 705—707), *A. Ledieu* (Ebenda, p. 707—713), *A. Meyer* (Blätter f. d. bayer. Gymnasialschulwesen, Bd. 4 [1868], S. 227—231;

dieser Formel sind die von *W. Knobloch* (in seiner Schrift: Die wichtigsten Kalender der Gegenwart [1885], S. 54—61) gegebene und besonders Herrn *Kinkelins* Aufsatz in der Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 15 (1870), S. 217—228 (abgedruckt in den Verhandl. d. Naturf. Ges. Basel, Bd. 5 [3. Heft, 1871], S. 371—387)*); letztere Ableitung ist, etwas gekürzt und verändert, auch in *R. Wolfs* Handbuch der Astronomie (I[1880—81], S. 623—624) übergegangen. Daneben haben sich aber sehr zahlreiche Mathematiker auch selbständig mit dem Gegenstand beschäftigt, arithmetische Lösungen für die verschiedensten chronologischen Aufgaben angegeben und speziell verschiedene Osterformeln aufgestellt. Aus der älteren Zeit seien *Delambres* ausführliche Darstellung in der Histoire de l'Astronomie moderne, I (1821), p. 1—45, und der zitierte Aufsatz *Pipers* (a. a. O., S. 103—147) genannt, aus der späteren sind hervorzuheben die Osterformeln von *F. Maercker* (Arch. d. Math. u. Phys., 1. Reihe, Bd. 48 [1868], S. 15—34), *Ch. Zeller* (nach drei früheren Veröffentlichungen, darunter im Bulletin de la Société Mathém. de France, Bd. 11 [1883], p. 60—61, erschienen die Formeln zuletzt mit Erläuterung in den Acta mathematica, Bd. 9 [1887], S. 133—136), *E. B. Elliott* (Bulletin of the Philosophical Society, Washington, Bd. 6 [1884], p. 14—21), *E. Lakenmacher* (Astron. Nachr., Bd. 116 [1887], S. 325—328; vgl. Herrn *Schrams* interessante Herleitung dieser Formeln aus den *Gauß*schen, ebenda, S. 373—378), *P. Wolfskehl* (Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 4 [1903], S. 350), *J. Bach* (Die Osterfestberechnung [1907], S. 50—62) und zahlreiche andere, die sich sämtlich eng

vgl. auch Progr. d. Studienanstalt Metten 1870/71, S. 35—38), *G. Schubring* (Ztschr. f. d. ges. Naturw., Bd. 38 [1871], S. 424—436), *F. Goldscheider* (Progr. Nr. 97 d. Luisenstädt. Realgymnas. Berlin [1896]), *R. Schram* (Astron. Kal. f. 1900 Wien, S. 142—144), *J. Bach* (Theolog.-prakt. Quartalschrift Linz, Bd. 60 [1907], S. 563—571), *A. Lindhagen* (Arkiv för Matem., Astr. och Fysik, Bd. 5 [1909], Nr. 3); die Schriften von *L. Feldt* (De Gaussii formula paschali analytica commentatio, Braunsberg) und *O. Kaiser* (Beiträge zur Zahlenlehre und Chronologie [Progr. d. Staatsobergymnas. Bielitz 1892]) sind mir leider nicht zu Gesicht gekommen. Vgl. auch den oben zitierten Aufsatz von *F. Maercker*.

*) Doch scheint mir die Darlegung der chronologischen Voraussetzungen in diesem Aufsatz nicht überall einwandfrei zu sein: so wird z. B. auf S. 221 im letzten Absatz angegeben, der erste volle Monat jedes Jahres erhalte 30^d, der zweite 29^d, während dies tatsächlich in 19 Jahren nur zweimal (zu Beginn des 3. und 11. Jahres eines Zyklus) der Fall ist, und in den anderen Jahren das Verhältnis gerade umgekehrt ist; auch hat der 3. Monat nicht, wie behauptet wird, immer, sondern nur dann, wenn Ostern in den 4. Monat fällt (in den Jahren 3, 8, 11, 19 eines Zyklus), 30 Tage. Ebenso sind in den Angaben der Zeilen 2 bis 7 derselben Seite kleine Inkorrektheiten enthalten.

an die *Gauß*sche Formel anschließen und nur — freilich unter Aufgabe der dieser eigentümlichen Kürze und Übersichtlichkeit — Vereinfachungen für das Rechnen bewirken wollen, ganz besonders aber das vortreffliche, alle nur denkbaren Aufgaben in den wichtigeren Zeitrechnungen lösende Buch von *W. Matzka*: Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange (1844)*).

Nun haben aber meines Wissens alle, die sich mit der mathematischen Formulierung der Osterregeln beschäftigt haben, bei der Berechnung der Ostergrenze**) den von *Gauß* betretenen Weg eingeschlagen, indem sie von der Tatsache ausgingen, daß in einem beliebigen Jahre stets (von der leicht auszuschaltenden Ausnahme im ersten Jahre jedes Mondzyklus abgesehen) die Ostergrenze entweder um 11 Tage früher oder um 19 Tage später fällt als im vorhergehenden Jahre. Im Gegensatz hierzu soll im folgenden unter Außerachtlassung dieser Tatsache die Aufstellung einer demgemäß von den vorhandenen wesentlich verschiedenen Osterformel versucht werden in der Weise, daß *das System der kirchlichen Mondzyklen, -jahre und -monate als eine für sich unabhängige Kalenderform betrachtet wird, und die Berechnung der Ostergrenze also nur als ein Spezialfall der Aufgabe erscheint, ein beliebiges Datum dieser Zeitrechnung in das entsprechende des julianischen oder des gregorianischen Kalenders zu verwandeln.* Dabei wird man unschwer erkennen, daß der Grundgedanke bei der Bestimmung der Länge einer beliebigen Anzahl von Jahren der kirchlichen Zeitrechnung sich teilweise an den der *Gauß*schen von *M. Hamburger****) vortrefflich analysierten Passahformel†) anlehnt; doch wird dadurch, daß von der Zahl der in einem beliebigen Zeitraum enthaltenen *Schaltjahre* ausgegangen wird und demgemäß die Jahreszahl den Koeffizienten 7 statt 12 erhält,

---

*) Ein Nachtrag hierzu ist des nämlichen Verfassers Aufsatz: Zur christl. Zeitrechnung und für deren Verbesserung (Abh. d. böhm. Ges. d. Wiss., 6. Folge, Bd. 10 [1881], math.-naturw. Klasse, Nr. 5).

**) Die Bestimmung des Osterfestes setzt sich zusammen aus der Berechnung erstens der Ostergrenze und zweitens des Sonntags; dabei versteht man unter der Ostergrenze den 14. Tag desjenigen zyklisch zu bestimmenden Mondmonats, der am 8. März oder zunächst nach diesem Tag seinen Anfang nimmt (vgl. auch *H. Grotefends* Zeitrechnung d. deutschen Mittelalters u. d. Neuzeit, I [1891], S. 144 s. v. Ostergrenze).

***) Dieses Journal, Bd. 116 (1896), 90—96.

†) Monatl. Corresp. f. Erd- u. Himmelsk., Bd. 5 (1802), 435—437; *Gauß'* Werke, VI, 80—81.

eine für die praktische Verwendung nicht unwesentliche Vereinfachung gegenüber *Gauß* erzielt, *die auch auf die Gaußsche Passahformel selbst mit Vorteil angewendet werden kann**). Die Lösung der Aufgabe auf diesem Wege — vor allem für den gregorianischen Kalender — dürfte für den Mathematiker von Interesse sein; auch für die Chronologie wird sie sich vielleicht als fruchtbringend erweisen, insofern als sie die Gewinnung teils exakter, teils angenäherter Formeln für die direkte Osterberechnung in anderen auf dem synodischen Monat basierenden Zeitrechnungen (vor allem der jüdischen) ermöglicht oder erleichtert, wovon jedoch im folgenden nur eine einzige beschränkte Anwendung gemacht werden wird. — Der andere Teil der Osterrechnung, die Bestimmung des Sonntags, wird sich, von einer kleinen, durch den ersten Teil bedingten Vereinfachung**) abgesehen, ganz an *Gauß* anschließen; doch wird man, wie ich hoffe, hier in der Einfachheit und Kürze des Weges, auf dem das Resultat erreicht wird, einen bescheidenen Fortschritt gegenüber den bisherigen Ableitungen der *Gauß*schen Formel erblicken.

Die kirchliche Vorschrift bestimmt, daß der erste Ostertag auf den Tag der Luna XV. fallen solle, wenn dieser selbst ein Sonntag sei, im anderen Falle auf den nächstfolgenden Sonntag; dabei ist zur Vereinfachung des weiteren der Tag, der auf den Tag der Ostergrenze (diese wird auch „Ostervollmond", „Terminus paschalis" oder „Luna XIV." genannt) unmittelbar folgt, „Luna XV." (Luna quinta decima) genannt. Ferner möge im folgenden $\left[\frac{m}{n}\right]$ den (kleinsten positiven) Rest, der sich bei der Division $\frac{m}{n}$ ergibt, und $\left[\frac{m}{n}\right]_q$ die ganze Zahl des Quotienten bezeichnen.

I. Bestimmung des julianischen Osterfestes.

1. *Die Luna XV.* Über den Mondkalender, der der julianischen Osterrechnung zugrunde liegt, sei folgendes bemerkt: In einem Zyklus von 19 Jahren sind 12 Gemeinjahre von 354 Tagen und 7 Schaltjahre von 384 Tagen enthalten, nur das letzte Jahr jedes Zyklus wird hiergegen um einen Tag verkürzt; dazu kommt noch weiter der in jedem vierten julia-

---

*) Es ist dann dort a zu berechnen als der Rest von $\frac{7A+1}{19}$ statt von $\frac{12A+17}{19}$, und der dritte Ausdruck $(M+m)$ geht über in die Form

$$60{,}0204457 + 0{,}25\,b - 1{,}5542418\,a - 0{,}003177794\,A.$$

**) In Formel [4.] am Ende des Teiles I. hat c den Koeffizienten 1, während der entsprechende Wert bei *Gauß*, d', mit 6 zu multiplizieren ist.

nischen Jahre eintretende Schalttag, der auch dem betreffenden Mondjahre hinzugefügt wird. Nach diesen Bestimmungen sind in Z Zyklen mit n julianischen Schalttagen $19Z \cdot 354 + 7Z \cdot 30 - Z + n$ Tage enthalten, die den $19Z \cdot 365 + n$ Tagen der entsprechenden julianischen Sonnenjahre gleichkommen.

Ein Mondzyklus beginnt in all den Jahren der christlichen Zeitrechnung, deren Jahreszahlen durch 19 ohne Rest teilbar sind; am einfachsten geht man vom Jahre 0 (dem historischen Jahre 1 v. Chr.) aus. Der Beginn der einzelnen Jahre wird meist in den Januar oder den vorangehenden Dezember gesetzt; für die Berechnung ist es besser, sie mit der Luna XV. anfangen zu lassen. Dann sind, wie sich aus einer Prüfung des „immerwährenden julianischen Kalenders“*) unschwer ergibt, stets die Jahre 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18 eines Zyklus Schaltjahre. Die Länge einer beliebigen Anzahl solcher Mondjahre, vom Beginn eines Zyklus an gezählt, läßt sich leicht berechnen. Geht man nämlich, vom Ende des 7. Jahres eines beliebigen Zyklus $Z+1$ beginnend, um folgende 18 Intervalle von je 8 Jahren zurück

$$19Z+7 \text{ bis } 19Z+7-8+1,\ 19Z+7-8 \text{ bis } 19Z+7-2\cdot 8+1,$$
$$\ldots\ 19Z+7-17\cdot 8 \text{ bis } 19Z+7-18\cdot 8+1,$$

so sind in jedem dieser Intervalle 3 Schaltjahre enthalten, während in $19Z$ Jahren stets $7Z$ Schaltjahre, in den 7 Jahren von $19Z+1$ bis $19Z+7$ aber 3 Schaltjahre vorkommen; $19Z+7-8a$ Jahre $(a=0, 1, \ldots 18)$ enthalten somit stets

$$7Z+3-3a \text{ Schaltjahre.}$$

Wenn nun A eine beliebige julianische Jahreszahl oder, was das nämliche ist, die Zahl der von der Luna XV. des Jahres 0 bis zu der des Jahres A verflossenen kirchlichen Mondjahre bezeichnet, ferner Z eine beliebige positive ganze Zahl (mit Einschluß der Null) darstellt, so läßt sich A stets und nur auf eine Weise auf die Form

$$(1.) \qquad A = 19Z+7-8a \qquad (a=0, 1, \ldots 18)$$

bringen. Es folgt nämlich

*) *Christ. Clavius:* Romani Calendarii a Gregorio XIII. P. M. restituti explicatio (Romae 1603), p. 108—111; abgedruckt auch in *L. Idelers* Handb. der math. u. technischen Chronologie, II (1826), S. 194—196, *F. J. Brockmanns* System der Chronologie (1883), S. 111, *Grotefends* oben genanntem Werke, I, (10)—(11), u. v. a. Werken.

(2.) $$7A+8=19(7Z+3-3a)+a,$$

woraus

[1.] $$a=\left[\frac{7A+8}{19}\right].$$

Ist a auf diese Weise eindeutig bestimmt, so ergibt Gleichung (1.) einen ebenfalls eindeutig bestimmten Wert von Z.

Nun sind, wie gezeigt wurde, in $19Z+7-8a$ Jahren stets $7Z+3-3a$ Schaltjahre, demnach unter Berücksichtigung von (1.) und (2.) in A Jahren

(3.) $$\frac{7A+8-a}{19}$$

Schaltjahre enthalten. Da aber die vollen in A Jahren enthaltenen Zyklen mit der entsprechenden Anzahl julianischer Jahre vollkommen übereinstimmen, so bedarf es nur der Bestimmung der Länge der im laufenden Zyklus verflossenen Jahre. Setzt man daher

(4.) $$A=19z+M, \quad (z=0,1,2,\ldots;M=0,1,\ldots 18),$$

wo offenbar z die Zahl der vollen verflossenen Zyklen, M die Zahl der im laufenden Zyklus verflossenen Jahre angibt, so läßt sich nach dieser Form für A der Ausdruck (3.) umformen in

$$7z+\frac{7M}{19}+\frac{8}{19}-\frac{a}{19},$$

und da z Zyklen stets $7z$ Schaltjahre enthalten, so sind unter M Jahren

$$\frac{7M}{19}+\frac{8}{19}-\frac{a}{19} \text{ Schaltjahre.}$$

Die Zahl der in M Jahren enthaltenen Tage beträgt also, von den julianischen Schalttagen abgesehen,

$$354M+\frac{210M}{19}+\frac{240}{19}-\frac{30a}{19}.$$

Andererseits enthalten M julianische Jahre, wobei hier ebenfalls die Schalttage ungezählt bleiben, $365M$ Tage; M Mondjahre übertreffen demnach M julianische Jahre um

(5.) $$\frac{240}{19}-\frac{30a}{19}+\frac{M}{19} \text{ Tage.}$$

Nun wird die Luna XV. des Jahres 0 auf den 6. April oder den 37. März gesetzt; das Märzdatum L der Luna XV. des Jahres A ist daher bestimmt durch die Gleichung

(6.) $$L=50-c, \text{ wo } c=\frac{30a+7-M}{19}.$$

Da aber c stets eine ganze Zahl sein muß und $M=0, 1, \ldots 18$, so läßt sich letztere Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

[2.] $$c = a + \left[\frac{11a+7}{19}\right]_q.$$

2. *Der Ostertag.* Zur Bestimmung der Entfernung zwischen Luna XV. und Ostertag ist es nötig, zu wissen, welche Monatstage S im März des Jahres A Sonntage sind. Die Rechnung ergibt, daß im Jahre 0 der 7. März ein Sonntag war; daher ist für dieses Jahr

$$S \equiv 0 \pmod 7.$$

Es sei

$$\left[\frac{A}{4}\right]_q = P,$$

dann sind vom März des Jahres 0 bis zum März des Jahres A offenbar P julianische Schalttage verflossen. Da nun ein julianisches Gemeinjahr 52 Wochen und 1 Tag enthält, so vermindern sich die Werte von S zunächst durch jedes Jahr um einen, dann aber durch jeden Schalttag noch um einen weiteren Tag, so daß für das Jahr A

$$S \equiv -A - P.$$

Setzt man

[3.] $$b = \left[\frac{A}{4}\right]$$

und berücksichtigt, daß $A-b=4P$, so folgt

$$S \equiv 6A + \frac{b-A}{4},$$

oder, da $\frac{b-A}{4}$ und somit auch $\frac{7(b-A)}{4}$ ganze Zahlen sind,

(7.) $$S \equiv 4A + 2b \pmod 7.$$

Bezeichnet man endlich die Zahl der Tage, um die der Ostertag der Luna XV. nachfolgt, mit d, so ist

$$d \equiv S - L \pmod 7, \quad (d = 0, 1, \ldots 6)$$

daher, wenn man die Werte aus (7.) und (6.) einsetzt,

[4.] $$d = \left[\frac{4A + 2b + c + 6}{7}\right].$$

Ostern fällt dann auf März $L+d$ oder März $50+d-c$.

Die Zusammenstellung der Resultate gibt also folgende Regeln:

Um das Datum des julianischen Osterfestes des Jahres A zu bestimmen, bezeichne man

den Rest der Division $\frac{7A+8}{19}$ *mit* a,

den Rest der Division $\frac{A}{4}$ *mit* b,

die Summe aus a und der ganzen Zahl des Quotienten $\frac{11a+7}{19}$ (ohne Rücksicht auf den Rest) *mit* c,

den Rest der Division $\frac{4A+2b+c+6}{7}$ *mit* d.

Dann fällt der Ostersonntag auf den $(50+d-c)$*-ten März oder*, wenn $50+d-c$ größer ist als 31, *auf den* $(19+d-c)$*-ten April.*

Beispiel: $A=1582$; $a=5$; $b=2$; $c=5+3=8$; $d=4$. Der Ostersonntag 1582 fiel auf den 15. April.

II. Bestimmung des julianischen Osterfestes in der Zeitrechnung der Mohammedaner.

Obgleich die Lösung dieser Aufgabe im wesentlichen nur in einer ziemlich losen Verbindung zweier Formeln, einer Osterformel und einer Formel zur Verwandlung christlicher Daten in mohammedanische, besteht und bestehen kann, dürfte die folgende Durchführung schon deswegen zweckmäßig sein, weil, was zunächst den letztgenannten Teil der Aufgabe betrifft, die angewandte Methode zur Verwandlung julianischer Daten in mohammedanische, die ich in etwas komplizierterer Form bereits im Anschluß an einen früheren Aufsatz*), aber ohne Ableitung, angegeben habe,

*) Ztschr. f. math. u. naturw. Unterr., Bd. 39 (1908), 605—606. Die dort gegebenen Regeln sind gemäß der im weiteren entwickelten Methode in folgende, wesentlich einfachere Form zu bringen: *Der N″-te Tag des christlichen Jahres A″, wobei N″ das julianische Datum ist und vom Beginn des März* statt vom Beginn des Januar *an gezählt wird, entspricht dem T″-ten Tag des mohammedanischen Jahres J″, wenn man bezeichnet*

die Differenz $A''-622$ *mit* B'', *den Rest der Division* $\frac{A''}{4}$ *mit* a'', *die ganze Zahl des Quotienten* $\frac{6550+30N''+326{,}5B''-7{,}5a''}{10631}$ *mit* C'', *den Rest dieser Division mit* c'', *die Summe* $B''+C''$ *mit* J'', *die ganze Zahl des Quotienten* $\frac{c''}{30}$ *mit* T''.

meines Wissens durchaus neu und den vorhandenen Methoden*) wesentlich überlegen ist. In dem anderen Teil der Aufgabe, der Osterformel, wird zur Bestimmung der Luna XV. der eben benutzte Weg eingeschlagen, weil sich auf diese Weise die *äußerst einfache angenäherte Lösung* der Aufgabe, die am Schluß angefügt ist und dem praktischen Chronologen gute Dienste leisten dürfte, naturgemäß ergibt; sie ist wohl hinreichend durchsichtig, um keiner Ableitung zu bedürfen. Ferner wird die Bestimmung des Sonntags (mittels Formel [9.]) in der mohammedanischen, nicht wie oben in der christlichen Zeitrechnung vorgenommen, teils weil das Resultat an sich chronologisch und mathematisch von Interesse ist und zugleich teilweise den Vorzug der Einfachheit besitzt (insofern als die Jahreszahl J in Formel [9.] den Koeffizienten 1 statt 4 erhält), teils weil auf diesem Wege bei einer Anwendung auf das gregorianische Osterfest die Bestimmung der besonders zu berechnenden *Gauß*schen Konstante N völlig erspart bleibt.

Hinsichtlich der mohammedanischen Zeitrechnung genügt es, vorauszuschicken, daß die Länge des mittleren mohammedanischen Jahres $354\frac{11}{30}$ Tage beträgt, während ein bürgerliches Gemeinjahr 354, ein bürgerliches Schaltjahr 355 Tage umfaßt, wobei der Schalttag am Ende des Jahres angefügt wird.

1. *Die Luna XV.* Zur Bestimmung der Länge von A kirchlichen Mondjahren werde von der Länge der nämlichen Anzahl julianischer Jahre ausgegangen. Enthalten diese P Schalttage, so ist, wie oben gezeigt,

$$P=\left[\frac{A}{4}\right]_q=\frac{A-b}{4}, \quad \left(b=\left[\frac{A}{4}\right]\right),$$

und A julianische Jahre enthalten demnach

$$365\frac{1}{4}A-\frac{1}{4}b \text{ Tage.}$$

Bringt man A wieder auf Form (4.)

$$A=19z+M \qquad (M=0,1,\dots 18),$$

so stimmen z Mondzyklen mit $19z$ julianischen Jahren überein, während M Mondjahre nach (5.) die entsprechenden M julianischen Jahre übertreffen um

$$13-c \text{ Tage},$$

*) Vgl. die Zusammenstellung in: *S. B. Burnaby*, Elements of the Jewish and Muhammadan Calendars (1901), p. 410—446.

wo c den Wert [2.] hat. Die Länge von A kirchlichen Mondjahren, von der Luna XV. des Jahres 0 an gerechnet, beträgt also

$$13+365{,}25\,A-0{,}25\,b-c \text{ Tage.}$$

Die Länge von A mittleren mohammedanischen Jahren hingegen beträgt $354\frac{11}{30}A$ Tage, und jene übertrifft diese demnach um

$$\frac{1}{30}(390+326{,}5\,A-7{,}5\,b-30\,c) \text{ Tage.}$$

Rechnet man die mohammedanische Zeitrechnung entsprechend zurück, so ist das Datum der Luna XV. des christlichen Jahres 0 im mittleren mohammedanischen Jahre -641 bestimmt durch den Wert $218\frac{12}{30}$*); fügt man dies im obigen Ausdruck ein und addiert noch $\frac{15}{30}$**), so ist das Datum der Luna XV. des christlichen Jahres A im mittleren mohammedanischen Jahr $A-641$

$$\frac{1}{30}(6957+326{,}5\,A-7{,}5\,b-30\,c).$$

Dieser Ausdruck wächst aber, da das mohammedanische Jahr im Gegensatz zu dem julianischen und kirchlichen ein freies Mondjahr ist, allmählich zu der Größe eines und mehrerer mohammedanischer Jahre an, so daß dann die Luna XV. des christlichen Jahres A nicht mehr in das mohammedanische Jahr $A-641$ fällt. Bezeichnet E die Anzahl der mittleren mohammedanischen Jahre, deren Länge der Wert des obigen Ausdrucks übersteigt, so fällt die gesuchte Luna XV. in das Jahr

[5.] $$J=A+E-641;$$

dabei ist E, da die Länge des mittleren mohammedanischen Jahres $\frac{10631}{30}$ Tage beträgt, die ganze Zahl des Quotienten

[6.] $$\frac{6957+326{,}5\,A-7{,}5\,b-30\,c}{10631},$$

*) Ich nehme in Rücksicht auf die Üblichkeit im bürgerlichen Gebrauche den **16.** Juli 622 n. Chr. als Epoche der mohammedanischen Zeitrechnung (vgl. *F. K. Ginzel*s Handb. d. math. u. techn. Chronologie, I [1906], 259) und im weiteren das **16.** Jahr eines dreißigjährigen Zyklus als Schaltjahr an (ebenda, 255).

**) Der Fehler, der durch diese für die Einfachheit der Rechnung zweckmäßige Addition entsteht, wird weiter unten berücksichtigt und ausgeglichen werden.

während der 30. Teil des mit e zu bezeichnenden Restes dieser Division das Datum der Luna XV. im mittleren Jahre J angibt.

Um indes das entsprechende Datum f im bürgerlichen Jahre, das naturgemäß stets durch eine ganze Zahl ausgedrückt ist, zu bestimmen, ist zum Datum im mittleren Jahre noch der Überschuß u (in Tagen) des mittleren Jahres über das bürgerliche zu Beginn des Jahres J zu addieren. u hat stets einen der Werte $-\frac{14}{30}, -\frac{13}{30}, \ldots 0, \ldots \frac{15}{30}$; da nun oben bereits der Wert $\frac{15}{30}$ addiert worden ist, so ist

$$f = \frac{e-g}{30}, \tag{8.}$$

wo

$$g = 15 - 30u = 29, 28, \ldots 0; \tag{9.}$$

weil ferner f stets ganzzahlig ist, läßt sich statt (8.) schreiben:

$$f = \left[\frac{e}{30}\right]_q, \tag{7.}$$

und es ist somit

$$g = \left[\frac{e}{30}\right]. \tag{8.}$$

2. *Der Ostertag.* Es ist hier wieder zunächst nötig, zu wissen, welche Tage T im Jahre J Sonntage sind. Für das Jahr 1 der mohammedanischen Zeitrechnung, das mit einem Freitag begann, ist

$$T \equiv 3 \pmod 7.$$

Mohammedanische Gemeinjahre umfassen 50 Wochen und 4 Tage, Schaltjahre um 1 Tag mehr; nach einem Gemeinjahr sind daher die Werte von T um 4, nach einem Schaltjahre um 5 Einheiten kleiner als im vorhergehenden Jahr. Bezeichnet $\varkappa$ die Zahl der bis zum Beginn des Jahres J verflossenen Gemeinjahre, ε die der Schaltjahre, so ist demnach für das Jahr J

$$T \equiv 3 - 4\varkappa - 5\varepsilon;$$

hieraus folgt, da $\varkappa + \varepsilon = J - 1$,

$$T \equiv 2 + 2\varkappa + \varepsilon + J \pmod 7. \tag{10.}$$

Da ein mohammedanisches Gemeinjahr um $\frac{11}{30}$ eines Tages kürzer, ein Schaltjahr um $\frac{19^d}{30}$ länger ist als ein mittleres Jahr, so ergibt sich aus

Gleichung (9.), in der u den Überschuß des mittleren Jahres über das bürgerliche zu Beginn des Jahres J bezeichnet hat, daß g nach einem Gemeinjahr um 11 kleiner, nach einem Schaltjahr um 19 größer ist als im vorhergehenden Jahre; da nun bei Beginn der mohammedanischen Zeitrechnung $u=0$, somit der entsprechende Wert von $g=15$ war, so ist für das Jahr J

(11.) $$g=15-11\varkappa+19\varepsilon,$$
$$3g+4\equiv 2\varkappa+\varepsilon \pmod 7.$$

Setzt man diesen Wert in (10.) ein, so erhält man

$$T\equiv J+3g+6 \pmod 7;$$

diese Kongruenz stellt zugleich eine einfache, meines Wissens nicht bekannte *Formel zur Auffindung der Sonntage eines mohammedanischen Jahres dar**), *wenn man* $g=\left[\frac{19J+26}{30}\right]$ *setzt*, ein Wert, der sich aus (11.) unschwer ergibt.

Bezeichnet schließlich h die Zahl der Tage, um die der Ostertag der Luna XV. nachfolgt, so ist

$$h\equiv T-f \pmod 7,$$

somit, da $h=0,1,\ldots 6$,

[9.] $$h=\left[\frac{J+3g+6f+6}{7}\right].$$

Hat man so die Werte von a,b,c nach der im Teile I. des vorliegenden Aufsatzes gegebenen Osterformel und diejenigen von E,e,J,f,g,h mit Hilfe der [6.], [5.], [7.], [8.], [9.] numerierten Ausdrücke und Gleichungen bestimmt, so *fällt der Ostersonntag des Jahres A auf den* $(f+h)$*-ten Tag des Jahres J der mohammedanischen Zeitrechnung.* Dabei *ist J ein Schaltjahr, wenn* $g<11$, *sonst ein Gemeinjahr.*

Für die Verwandlung der Tage in Monate und die eines 354 übersteigenden Wertes von $f+h$ (solche Werte werden erst vom vierten christlichen Jahrtausend an einige Zeit hindurch und auch dann nur selten vorkommen) in ein Jahr und Tage verweise ich auf die diesbezüglichen Bemerkungen in meinem obengenannten Aufsatze**).

---

*) *Noch etwas kürzer gestaltet sich diese Rechnung unter Benutzung der Formel*

$$T\equiv J+\tfrac{4}{,}i+2 \pmod 7,$$
$$wo\ i=\left[\frac{11J+3}{30}\right].$$

**) A. a. O., S. 604—605; an Stelle des dort vorkommenden Wertes b ist $29-g$ zu setzen.

Eine einfache Probe auf die ungefähre Richtigkeit des Resultates kann man folgendermaßen anstellen. Man setze

$$\left[\frac{7A+8}{19}\right]_q + 7 = s,$$

$$A + \left[\frac{s}{12}\right]_q - 641 = J,$$

$$\left[\frac{s}{12}\right] + 1 = m;$$

dann fällt das gesuchte Osterfest in die zweite Hälfte des m-ten Monats (in späteren Jahrtausenden allmählich in den $[m+1]$-ten Monat) *des Jahres J.*

Beispiel: $A = 2222$; $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$; $E = 68$; $e = 9487$; $J = 1649$; $f = 316$; $g = 7$; $h = 2$; $-s = 826$; $J = 1649$; $m = 11$. Das julianische Osterfest 2222 entspricht dem 318. Tag (dem 23. Tag des 11. Monats) des Jahres 1649 der mohammedanischen Zeitrechnung.

III. Bestimmung des gregorianischen Osterfestes.

Wesentlich komplizierter als der Weg, der oben zur Gewinnung der julianischen Osterformel eingeschlagen wurde, ist derjenige, der zu entsprechenden Regeln für das gregorianische Osterfest führt; es gilt dabei vor allem, die Bestimmung der Länge einer beliebigen Anzahl von Mondjahren, statt wie oben unter Annahme eines bestimmten Einschaltungsmodus im neunzehnjährigen Zyklus, für 19 verschiedene Arten der Einschaltung allgemein durchzuführen, wobei ferner nicht von einer festen Epoche (wie oben vom 6. April des Jahres 0), sondern von 30 möglichen, in zwei Gruppen zusammenzufassenden Epochen auszugehen ist. Trotzdem ist das Resultat, dessen Ableitung ich mir für eine spätere Gelegenheit vorzubehalten erlaube, sehr einfach; es lautet folgendermaßen:

Um das Datum des gregorianischen Osterfestes des Jahres A zu bestimmen, bezeichne man

die Summe $A+K+1$ *mit* B, *den Rest der Division* $12B:19$ *mit* a, *den Rest der Division* $A:4$ *mit* b, *die Summe aus* a *und der ganzen Zahl des Quotienten* $\frac{K+11a}{19}$ (ohne Rücksicht auf den Rest) *mit* c, *den Rest der Division* $(4A+2b+6c+N):7$ *mit* d.

Dann fällt der Ostersonntag, von den im folgenden angegebenen Ausnahmen abgesehen, *auf den* $(22+c+d)$*-ten März oder*, wenn $c+d$ größer ist als 9, *auf den* $(c+d-9)$*-ten April*.

Dabei sind die Werte von K und N (N ist der nämliche Wert wie der bei *Gauß* mit N bezeichnete) stets für ein oder mehrere Jahrhunderte konstant, und zwar ist

	von 1583 bis 1699	von 1700 bis 1799	von 1800 bis 1899	von 1900 bis 2099	von 2100 bis 2199
$K=$	16	5	5	24	24
$N=$	2	3	4	5	6

	von 2200 bis 2299	von 2300 bis 2399	von 2400 bis 2499	von 2500 bis 2599	von 2600 bis 2699
$K=$	13	2	13	2	21
$N=$	0	1	1	2	3.

Allgemein ist, wenn die in A enthaltene Säkularzahl (d. i. A unter Abstreichung der ersten zwei Ziffern von rechts) mit k, und wie bei *Gauß* $\left[\frac{13+8k}{25}\right]_q$ mit p, $\left[\frac{k}{4}\right]_q$ mit q bezeichnet ist,

$$K=\left[\frac{19(k-p-q)+3}{30}\right] \text{ und } N=\left[\frac{4+k-q}{7}\right].$$

Zugleich gelten die beiden von *Gauß* bezeichneten Ausnahmefälle, die in zwei von den Ordnern des gregorianischen Kalenders gemachten willkürlichen, das System durchbrechenden Festsetzungen ihren Grund haben: Gibt nämlich die Rechnung als Ostertag den 26. April, so ist dafür stets der 19. April zu nehmen; gibt die Rechnung den 25. April und ist zugleich $K>21$ und $c=28$, so ist der 18. April zu nehmen. Beide Ausnahmen kommen nur äußerst selten vor, die erste in den Jahren 1609, 1981, 2076, 2133, 2201, 2296, 2448 usw., die zweite in den Jahren 1954, 2049, 2106, 3165 usw.

Beispiel: $A=1911$; $K=24$; $N=5$; $B=1936$; $a=14$; $b=3$; $c=14+9=23$; $d=2$. Der gregorianische Ostersonntag wird auf den 16. April fallen.

Selbstverständlich gilt diese Formel auch für den Spezialfall des julianischen Osterfestes und zwar dann ohne Ausnahme; hierbei ist immer $K=3$ und $N=6$ zu setzen.

Über eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf partielle Differentialgleichungen.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Die *Jacobi-Hamilton*sche Methode der Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung kommt in dieser Arbeit in Betracht. Wenn die hierbei auftretenden simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen lineare mit analytischen Funktionen als Koeffizienten sind, so gestattet die Theorie dieser Differentialgleichungen die verlangten Operationen vollständig durchzuführen. Im folgenden soll das bezügliche Verfahren angegeben werden, wobei von den *Jacobi*schen Arbeiten der Text aus der „Dynamik“ S. 364, 365 (Gesammelte Werke Bd. V S. 282, 283, 284) zugrunde gelegt wird. Die *Jacobi-Hamilton*sche Theorie enthält einen Ausnahmefall, welchen *A. Mayer* in Bd. 3 der Mathematischen Annalen, S. 440 bis 443 durch eine Modifikation dieser Theorie unter Wahrung der ursprünglichen simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen beseitigt hat. Dieses Verfahren von *Mayer* wird daher hier gleichfalls aufgenommen.

1.

Es sei

$$f(t, q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m) \tag{1.}$$

ein ganzer rationaler Ausdruck der Variablen p, q nicht höheren als zweiten Grades. Die Koeffizienten in demselben seien analytische Funktionen von t, die in einem einfach zusammenhängenden Bereiche T, welcher einen fixierten Punkt, für den $t=0$ genommen werden kann, enthält, einwertig und stetig sind. Nun handelt es sich darum, eine Funktion W zu konstruieren, welche von $t, q_1, q_2, \dots q_m$ als Variablen abhängt, m willkürliche Konstanten enthält und die partielle Differentialgleichung

$$(2.) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

erfüllt, wobei in dem in (1.) angegebenen f $\frac{\partial W}{\partial q_r}$ an Stelle von p_r gesetzt ist.

Zu dem Zweck werden folgende simultane gewöhnliche Differentialgleichungen angesetzt:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Diese sind also hier lineare homogene oder nicht homogene Differentialgleichungen. Es kommt nun der Grundsatz in Anwendung: Wenn in dem Bereiche T die Koeffizienten des Systems (3.) einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind, so gibt es eine und nur eine Lösung dieses Systems, bei welcher die Variablen p, q in demselben Bereiche von t einwertige und stetige analytische Funktionen sind und in dem Punkte $t=0$ vorgeschriebene Werte annehmen. Zunächst wird eine solche Lösung von (3.) genommen

$$(4.) \qquad q_{10}, q_{20}, \dots q_{m0}, \; p_{10}, p_{20}, \dots p_{m0},$$

bei welcher der Anfangswert in $t=0$ von den sämtlichen Variablen q und p gleich Null ist. Sind die Differentialgleichungen (3.) homogen, so werden die Größen (4.) gleich Null. Sodann werden in dem System (3.) diejenigen Teile, welche die Variablen p, q nicht enthalten, weggelassen, so daß das System der zu (3.) gehörigen simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen auftritt (welches auch das ursprüngliche sein kann). Von diesem System werden dann $2m$ Lösungen

$$(5.) \qquad q_{1r}, q_{2r}, \dots q_{mr}, \; p_{1r}, p_{2r}, \dots p_{mr} \qquad (r=1, \dots 2m)$$

mit folgenden Anfangswerten genommen. Bei $r=1, \dots m$ sei der Anfangswert von q_{rr} gleich 1, von allen anderen q und p gleich Null. Bei $r = m+\varrho$ $(\varrho=1, \dots m)$ sei der Anfangswert von $p_{\varrho, m+\varrho}$ gleich 1, von allen anderen q und p gleich Null. Es seien nun

$$(6.) \qquad c_1, c_2, \dots c_m, \; b_1, b_2, \dots b_m$$

willkürliche Konstanten. Dann wird folgende Lösung q_1 bis q_m, p_1 bis p_m von (3.) aufgestellt:

$$(7.)\quad \begin{cases} q_1 = q_{10} + c_1 q_{11} + c_2 q_{12} + \cdots + c_m q_{1m} + b_1 q_{1,m+1} + \cdots + b_m q_{1,2m}, \\ q_2 = q_{20} + c_1 q_{21} + c_2 q_{22} + \cdots + c_m q_{2m} + b_1 q_{2,m+1} + \cdots + b_m q_{2,2m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m = q_{m0} + c_1 q_{m1} + c_2 q_{m2} + \cdots + c_m q_{mm} + b_1 q_{m,m+1} + \cdots + b_m q_{m,2m}, \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} p_1 = p_{10} + c_1 p_{11} + c_2 p_{12} + \cdots + c_m p_{1m} + b_1 p_{1,m+1} + \cdots + b_m p_{1,2m}, \\ p_2 = p_{20} + c_1 p_{21} + c_2 p_{22} + \cdots + c_m p_{2m} + b_1 p_{2,m+1} + \cdots + b_m p_{2,2m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m = p_{m0} + c_1 p_{m1} + c_2 p_{m2} + \cdots + c_m p_{mm} + b_1 p_{m,m+1} + \cdots + b_m p_{m,2m}. \end{cases}$$

Diese Lösung ist so beschaffen, daß für $t=0$ $q_r = c_r$, $p_r = b_r$ $(r=1,\ldots m)$ wird.

Das Gleichungssystem (7.) soll nach den b auflösbar sein. Zu dem Zwecke wird vorausgesetzt, daß die Determinante

$$(9.)\qquad D = \begin{vmatrix} q_{1,m+1} \cdots q_{1,2m} \\ q_{2,m+1} \cdots q_{2,2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{m,m+1} \cdots q_{m,2m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Diese Bedingung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn die Determinante

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dq_{1,m+1}}{dt} \cdots \frac{dq_{1,2m}}{dt} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{dq_{m,m+1}}{dt} \cdots \frac{dq_{m,2m}}{dt} \end{vmatrix}$$

für $t=0$ nicht verschwindet, da die q in (9.) für $t=0$ verschwinden. Die Größen $\frac{dq_{1,m+r}}{dt}, \ldots \frac{dq_{m,m+r}}{dt}$ für $t=0$ gehen aus den Gleichungen der ersten Vertikalzeile in (3.) hervor, wenn in $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial p_m}$ die q gleich Null, $p_r=1$, die übrigen p gleich Null gesetzt werden. Demnach ist die in bezug auf die Determinante (10.) angegebene Bedingung zum Beispiel erfüllt, wenn die p in f (1.) nur in einer quadratischen Form von m Variablen vorkommen, deren Diskriminante für $t=0$ nicht verschwindet. Wenn aber die p in f (1.) nur linear vorkommen, so enthalten die in der ersten Vertikalzeile in (3.) stehenden Gleichungen die p nicht, die Vertikalzeilen in (9.) werden einander gleich, und die Determinante (9.) verschwindet.

Dieser Fall, daß die p in f (1.) nur linear vorkommen, wird daher ausgeschlossen. Durch eine Modifikation des weiteren Verfahrens, wobei die Differentialgleichungen (3.) gewahrt bleiben und die Funktionaldeterminante der Ableitungen der q nach den b (hier die Determinante (9.)) nicht gebraucht wird, hat *A. Mayer* im dritten Bande der Mathematischen Annalen nach Besprechung des durch das Verschwinden jener Funktionaldeterminante bewirkten Ausnahmefalles S. 440 bis 443 eine Theorie aufgestellt, welche allgemein gilt; darüber in Nr. 4 der vorliegenden Abhandlung.

Zur Auflösung des Gleichungssystems (7.) nach den b werde der Ausdruck in (7.)

$$q_{r0}+c_1 q_{r1}+c_2 q_{r2}+\cdots+c_m q_{rm}=S_r \tag{11.}$$

gesetzt. Nun ergibt sich für b_ϱ der Ausdruck

$$b_\varrho=\frac{a_{\varrho 1}(q_1-S_1)+a_{\varrho 2}(q_2-S_2)+\cdots+a_{\varrho m}(q_m-S_m)}{D}, \qquad (\varrho=1,\ldots m) \tag{12.}$$

wo die a und D in dem Gebiete T einwertige und stetige analytische Funktionen sind, die Quotienten $\frac{a_{\varrho b}}{D}$ für $t=0$ im allgemeinen unendlich in endlicher Ordnung werden. Die Variable t sei auf einer Strecke des Reellen in T bei $t=0$, welche den Nullpunkt nicht enthält und wo D nicht verschwindet, genommen. Ebenso sollen die m Werte c und die m Werte q in (12.) unabhängig voneinander sich auf Strecken des Reellen in T bewegen. Dann sind durch (12.) die zugehörigen Werte b bestimmt, so daß umgekehrt für die zusammengehörigen Werte die Gleichungen (7.) erfüllt sind.

Jetzt wird weiter der Ausdruck

$$p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f \tag{13.}$$

in Betracht gezogen. In diesen Ausdruck seien für die q und p die Funktionen (7.), (8.) eingetragen, wodurch derselbe eine Funktion von t, c, b wird:

$$F(t,c,b), \tag{14.}$$

und zwar ist F ein ganzer rationaler Ausdruck der Konstanten c und b (von nicht höherem als zweitem Grade) mit Koeffizienten, welche in dem Gebiete T einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind.

Nun wird das Integral

$$(15.) \qquad \int_0^t F(t,c,b)\,dt = V(t,c,b)$$

aufgestellt. Hier ist $V(t,c,b)$ ein ganzer rationaler Ausdruck der Konstanten c,b, in bezug auf diese von derselben Form wie $F(t,c,b)$ (14.), mit Koeffizienten, welche in dem Gebiete T einwertige und stetige analytische Funktionen sind. In den Ausdruck (15.) $V(t,c,b)$ werden dann für die Konstanten b die Ausdrücke (12.) eingesetzt. Der so erhaltene Ausdruck sei durch

$$(16.) \qquad W(t, q_1, q_2, \ldots q_m, c_1, c_2, \ldots c_m)$$

bezeichnet. W ist ein ganzer rationaler Ausdruck der q und c (von nicht höherem als zweitem Grade) mit von t abhängenden Koeffizienten, welche unter der Form von Quotienten auftreten, in denen Zähler und Nenner in dem Bereiche T einwertige und stetige analytische Funktionen sind, und zwar ist der gemeinschaftliche Nenner D^2.

Von der Funktion W (16.) soll gezeigt werden, daß dieselbe die partielle Differentialgleichung (2.) erfüllt. Es genügt dies nachzuweisen, wenn sich die Größen t, q, c unabhängig voneinander auf den oben (nach (12.)) angegebenen Strecken des Reellen bewegen. Aus der analytischen Fortsetzung folgt dann unmittelbar, daß die Gleichung (2.) erfüllt bleibt, wenn die q, c beliebige Werte annehmen und t beliebig in dem Gebiete T sich bewegt.

Wenn in W(16.) für die q die Ausdrücke (7.) eingesetzt werden, so erhält man nur unter anderer Form wieder V (15.).

2.

I. Es wird das Integral Nr. 1 (15.) behandelt. Die Variable t soll im Bereiche T auf der Achse des Reellen sich von Null bis zu einem fixierten Endwerte bewegen. Die Variable t und die Größen c und b sollen in den in Nr. 1 bei (12.) angegebenen Gebieten liegen. Dann wird für c und b

$$(1.) \qquad c + \varepsilon\delta c,\ b + \varepsilon\delta b$$

gesetzt, wo ε eine Variable ist, die um Null variiert, die Variationen δc, δb beliebige Konstanten sind. Die Variation des Integrales Nr. 1 (15.), wo $F(t,c,b)$ den Ausdruck Nr. 1 (13.) hat,

$$(2.) \qquad \delta \int_0^t F(t,c,b)\,dt = \delta V(t,c,b)$$

geht aus der Entwicklung von F nach Potenzen von ε hervor und stellt sich in folgender Weise dar:

$$(3.) \qquad \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} p_1 \delta \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \delta \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \delta \frac{\partial f}{\partial p_m} \\ - \frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m} \delta q_m \end{array} \right\} dt.$$

Dies ist gemäß den Gleichungen Nr. 1 (3.)

$$(4.) \qquad \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} p_1 \frac{\delta q_1}{dt} + p_2 \frac{\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m \frac{\delta q_m}{dt} \\ + \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \frac{dp_2}{dt} \delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt} \delta q_m \end{array} \right\} dt.$$

Demnach ergibt sich für $\varepsilon = 0$

$$(5.) \qquad \begin{aligned} \delta V(t,c,b) = {} & p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m \\ & - b_1 \delta c_1 - b_2 \delta c_2 - \cdots - b_m \delta c_m. \end{aligned}$$

Bei fixiertem Werte t sind die δc voneinander unabhängig. Werden auch die δq untereinander und von den δc unabhängig angenommen, so folgen aus Nr. 1 (12.), wenn in S_r Nr. 1 (11.) q_{r0} weggelassen wird und in Nr. 1 (12.) an Stelle der q und c die δq und δc treten, die zugehörigen Werte der δb. Nun wird bei demselben fixierten Werte t an Stelle von V Nr. 1 (15.) die Funktion W Nr. 1 (16.) genommen, in welcher für die q die Ausdrücke Nr. 1 (7.) gesetzt sind, wodurch dieselbe gleich V wird. Die Variation von W liefert

$$(6.) \qquad \begin{aligned} \delta W = {} & \frac{\partial W}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m} \delta q_m \\ & + \frac{\partial W}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial W}{\partial c_2} \delta c_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial c_m} \delta c_m. \end{aligned}$$

Aus (5.) und (6.) folgt für $\varepsilon = 0$

$$(7.) \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m.$$

$$(8.) \qquad \frac{\partial W}{\partial c_1} = -b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial c_2} = -b_2, \cdots \frac{\partial W}{\partial c_m} = -b_m.$$

Diese Gleichungen, von denen hier die Gleichungen (7.) weiter in Betracht kommen, gelten also auf Strecken des Reellen (s. Nr. 1 nach (12.)) für Werte t

(wo die Strecke für t den Punkt $t=0$ nicht enthält), für Werte c und für Werte q unabhängig voneinander; für die q und p sind dabei die Ausdrücke Nr. 1 (7.), (8.) einzusetzen, wobei die b durch Nr. 1 (12.) bestimmt sind.

II. In $V(t,c,b)$ Nr. 1 (15.) sind t und die c auf den vorhin angegebenen Strecken genommen und die b so, daß t, die c und q auf den angegebenen Strecken unabhängig voneinander bleiben. Der Differentialquotient von V nach t ist

$$\frac{dV}{dt} = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f. \tag{9.}$$

Es ist $V(t,c,b) = W(t,q,c)$, wenn in W die q durch Nr. 1 (7.) ausgedrückt sind. Daher ist auf derselben Strecke von t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt}. \tag{10.}$$

Ferner ist

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}. \tag{11.}$$

Dies wird mit Berücksichtigung von Nr. 1 (3.)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}. \tag{12.}$$

Aus (7.) und (9.) folgt

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial q_m} - f\left(t, q_1, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right). \tag{13.}$$

Nunmehr ergibt sich aus (10.), (12.) und (13.)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0 \tag{14.}$$

auf den für die Variablen t, q und die Konstanten c angenommenen Strecken, wobei diese Werte unabhängig voneinander sind. Durch die analytische Fortsetzung folgt, daß die Gleichung (14.) für beliebige Werte q und c und für die Werte t in dem Bereiche T erfüllt ist.

3.

In bezug auf Herstellung und Berechnung der Funktion $W(t, q_1, \ldots q_m, c_1, \ldots c_m)$ Nr. 1 (16.) wird folgendes angegeben. Die Funktion W ist aus dem Ausdruck $V(t,c,b)$ Nr. 1 (15.) hervorgegangen, nachdem in letzterem Ausdruck für die b die Ausdrücke Nr. 1 (12.) gesetzt waren. Es kommt zur Herstellung von W alles zurück auf Herstellung der Lösungen Nr. 1 (4.), (5.)

der simultanen linearen Differentialgleichungen Nr. 1 (3.) und der zugehörigen homogenen simultanen Differentialgleichungen. Solange die Koeffizienten in f Nr. 1 (1.) sich in einem Streifen über der Konstruktionsebene der komplexen Variablen t als einwertige und stetige analytische Funktionen von t fortsetzen lassen, wobei Punkte oder Gebiete umgangen werden können und, wenn ein solcher Streifen über ein bereits früher betretenes Gebiet in neuem Blatt sich hinüberzieht, andere Funktionswerte auftreten können, lassen sich auch die Lösungen Nr. 1 (4.), (5.) als in diesem ein- oder mehrblättrigen Streifen einwertige und stetige analytische Funktionen fortsetzen. Der Ausdruck dieser Fortsetzung geschieht sukzessive durch Anwendung von Potenzreihen mit positiven ganzzahligen Exponenten bei einem Punkte t_0. Diese nach Potenzen von $t-t_0$ fortschreitenden Reihen haben in bezug auf die Anfangswerte in t_0 die Beschaffenheit, wie die Reihen für die Lösungen Nr. 1 (4.), (5.) bei dem Punkte $t=0$. Alsdann treten Ausdrücke wie Nr. 1 (7.), (8.) auf, bei denen die Konstanten c und b die bereits erlangten Darstellungen der Lösungen in dem Punkte t_0 sind. Durch sukzessive Anwendung von solchen Potenzreihen werden also die Lösungen Nr. 1 (4.), (5.) hergestellt. Aus diesen gehen die Ausdrücke für die q und p Nr. 1 (7.), (8.) hervor, alsdann hieraus die Ausdrücke für die b Nr. 1 (12.), ferner die von t abhängenden Koeffizienten in $F(t,c,b)$ Nr. 1 (14.). Die Ausführung der Integration nach t in Nr. 1 (15.), wodurch $V(t,c,b)$ hervorgeht, geschieht dann ebenfalls an den für die Koeffizienten in $F(t,c,b)$ auftretenden Potenzreihen. Auf diese Weise wird also schließlich die Funktion W Nr. 1 (16.) hergestellt. —

Die Wertberechnung dieser Potenzreihen mit vorgeschriebener Annäherung geschieht nach den Angaben in Abh. Bd. 96 Nr. 18 dieses Journals. Hierzu ist erforderlich, eine positive Größe zu ermitteln gleich oder größer als der Modul der Potenzreihe in einem Gebiete innerhalb des Kreises, in welchem die Reihe konvergiert. Dies geschieht hier auf folgende Weise. Ein System von λ simultanen homogenen oder nichthomogenen linearen Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds_1}{dt} = l_{10} + l_{11}s_1 + l_{12}s_2 + \cdots + l_{1\lambda}s_\lambda, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{ds_\lambda}{dt} = l_{\lambda 0} + l_{\lambda 1}s_1 + l_{\lambda 2}s_2 + \cdots + l_{\lambda\lambda}s_\lambda \end{cases}$$

liege vor, dessen Koeffizienten l in dem Kreise um den Punkt t_0 als Mittelpunkt mit dem Radius R einwertige und stetige analytische Funktionen sind. Die s_ϱ sollen in t_0 die Anfangswerte $s_\varrho^{(0)}$ erhalten. Es wird $t-t_0=z$, $s_\varrho-s_\varrho^{(0)}=s'_\varrho$ gesetzt. Hierdurch gehe das System hervor

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds'_1}{dz}=l'_{10}+l'_{11}s'_1+\cdots+l'_{\lambda 1}s'_\lambda, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{ds'_\lambda}{dz}=l'_{\lambda 0}+l'_{\lambda 1}s'_1+\cdots+l'_{\lambda\lambda}s'_\lambda. \end{cases}$$

Nun wird, um die Lösung s'_ϱ $(\varrho=1,\ldots\lambda)$ zu untersuchen, das bekannte *Cauchy*sche Verfahren angewandt. Für die s'_ϱ $(q=1,\ldots\lambda)$ gehen eindeutig Entwicklungen der Form $\sum_1^\infty c_n^{(\varrho)} z^n$ hervor. An Stelle der l' tritt eine Entwicklung $g\left(1-\frac{z}{R'}\right)^{-1}$, wo g eine positive Größe gleich oder größer als der Modul aller l' auf einem Kreise um $z=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $R'<R$. Dann wird für die λ linear vorkommenden Variablen s' eine Variable u gesetzt und jetzt noch für die $l'_{\varrho 0}$ $(\varrho=1,\ldots\lambda)$ $\lambda g\left(1-\frac{z}{R'}\right)^{-1}$. An Stelle der λ Gleichungen (2.) tritt dann die eine

$$(3.)\qquad \frac{du}{dz}=\frac{\lambda g(u+1)}{1-\frac{z}{R'}}.$$

Aus dieser erfolgt

$$(4.)\qquad u+1=e^{-\lambda g R' \log\left(1-\frac{z}{R'}\right)},\quad \log 1=0.$$

Aus der Entwicklung des Ausdruckes (4.) ergibt sich *sofort* die unbedingte Konvergenz der ursprünglichen Entwicklungen der s (1.) innerhalb des *ganzen* Kreises um t_0 mit dem Radius R. Und der Ausdruck (4.) liefert den gesuchten Wert größer als der Modul der s' in einem Kreise mit dem Radius $R''<R'$. Da eine einzelne lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung durch ein System (1.) ersetzt werden kann, so enthalten die Formeln (3.), (4.) zugleich einen Beweis für den *allgemeinen* Grundsatz in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. —

Wenn in $f(t,q,p)$ Nr. 1 (1.) die Koeffizienten konstant in bezug auf t sind, so wird das System simultaner linearer Differentialgleichungen Nr. 1 (3.) ein solches mit konstanten Koeffizienten. Durch Zurückführung der Integration dieses Systems auf diejenige einzelner homogener linearer Differentialgleichungen (vgl. die Abhandlung des Verfassers Bd. 134 dieses

Journals S. 155) kommt man auf solche einzelnen mit konstanten Koeffizienten. Alsdann ergibt sich ein Fundamentalsystem von Lösungen der aus den Differentialgleichungen Nr. 1 (3.) durch Weglassung der Teile, welche die abhängigen Variablen nicht enthalten, entstehenden homogenen Differentialgleichungen unter geschlossener Form. Die Determinante dieses Fundamentalsystems verschwindet nicht in dem Punkte $t = 0$. Vermittelst dieses Fundamentalsystems werden die Lösungen Nr. 1 (4.), (5.) gebildet. Die Lösungen Nr. 1 (7.), (8.) erscheinen in geschlossener Form, ebenso die Ausdrücke der b Nr. 1 (12.) und der Ausdruck von $F(t, c, b)$ Nr. 1 (14.). Das Integral Nr. 1 (15.), welches $V(t, c, b)$ ergibt, tritt in geschlossener Form auf, und nun erscheint auch die Funktion W Nr. 1 (16.) in geschlossener Form. Die Funktionen von t, welche in W mit den q und c multipliziert sind, haben die Form von Quotienten, deren Zähler und Nenner, wenn die Konstanten in $f(t, q, p)$ reell sind, sich als ganze rationale Ausdrücke mit reellen Koeffizienten von Funktionen $e^{\alpha t}$, $\sin \beta t$, $\cos \gamma t$, t^n darstellen, wo die Konstanten α, β, γ reell, die n positive ganze Zahlen sind. (Vgl. hierbei die Abh. d. Verf. Bd. 136 dieses Journals S. 311.)

4.

Jetzt wird die in Nr. 1 erwähnte Abänderung der *Jacobi-Hamilton*schen Theorie behandelt, welche *A. Mayer* im dritten Bande der Mathematischen Annalen S. 440 bis 443 angegeben hat. Dieselbe liefert ein allgemein gültiges Verfahren.

Das Gleichungssystem Nr. 1 (7.) wird hier nicht nach den b, sondern nach den c aufgelöst. Die Determinante der Koeffizienten der c ist nicht identisch Null, da dieselbe für $t = 0$ gleich 1 ist. Diese Determinante sei durch D' bezeichnet und der Ausdruck in Nr. 1 (7.)

$$(1.) \qquad q_{r0} + b_1 q_{r,m+1} + \cdots + b_m q_{r,2m}$$

durch S'_r. Dann erfolgt aus Nr. 1 (7.) durch Auflösen nach den c

$$(2.) \qquad c_\varrho = \frac{\beta_{\varrho 1}(q_1 - S'_1) + \beta_{\varrho 2}(q_2 - S'_2) + \cdots + \beta_{\varrho m}(q_m - S'_m)}{D'},$$

wo die β und D' in dem Bereiche T einwertige und stetige analytische Funktionen sind. Der Ausdruck Nr. 1 (13.), (14.) $F(t, c, b)$ bleibt unverändert; ebenso das Integral Nr. 1 (15.) $V(t, c, b)$. Weiter wird jetzt der Ausdruck

(3.) $$V(t,c,b)+c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_m b_m=V'(t,c,b)$$

aufgestellt. In $V'(t,c,b)$ werden für die Konstanten c die Ausdrücke (2.) gesetzt. Die hierdurch hervorgehende Funktion sei durch

(4.) $$W'(t,q_1,q_2,\dots q_m,b_1,b_2,\dots b_m)$$

bezeichnet. W' ist ein ganzer rationaler Ausdruck der q und b (von nicht höherem als zweitem Grade) mit von t abhängenden Koeffizienten unter der Form von Quotienten, deren Zähler und Nenner in T einwertige und stetige analytische Funktionen sind, der gemeinschaftliche Nenner ist D'^2. Wenn in W' für die q wieder die Ausdrücke Nr. 1 (7.) gesetzt werden, so erhält man unter anderer Form wieder $V'(t,c,b)$. Diese Funktion W' ist jetzt diejenige, welche die partielle Differentialgleichung Nr. 1 (2.) an Stelle von W erfüllt.

Zum Beweise kann auf die Funktionen V' und W' dasselbe Verfahren angewandt werden, welches in Nr. 2 bei V und W gebraucht worden ist. Man erhält entsprechend den Formeln Nr. 2 (5, 6)

(5.) $$\delta V'=\delta V+\Sigma\delta(bc)=\Sigma p\delta q-\Sigma b\delta c+\Sigma\delta(bc)=\Sigma(p\delta q+c\delta b),$$

(6.) $$\delta W'=\Sigma\frac{\partial W'}{\partial q}\delta q+\Sigma\frac{\partial W'}{\partial b}\delta b.$$

Daraus folgt für $r=1,\dots m$

(7.) $$\frac{\partial W'}{\partial q_r}=p_r,$$

(8.) $$\frac{\partial W'}{\partial b_r}=c_r.$$

Analog Nr. 2 II ergibt sich:

(9.) $$\frac{dV'}{dt}=\Sigma p\frac{\partial f}{\partial p}-f,$$

(10.) $$\frac{dW'}{dt}=\frac{\partial W'}{\partial t}+\Sigma\frac{\partial W'}{\partial q}\frac{dq}{dt}=\frac{\partial W'}{\partial t}+\Sigma\frac{\partial W'}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Hieraus folgt mit Bezugnahme auf (7.) für $W'(t,q_1,\dots q_m,b_1,\dots b_m)$

(11.) $$\frac{\partial W'}{\partial t}+f\Big(t,q_1,\dots q_m,\frac{\partial W'}{\partial q_1},\dots\frac{\partial W'}{\partial q_m}\Big)=0.$$

W' ist für $t=0$ gleich

(12.) $$q_1b_1+q_2b_2+\cdots+q_mb_m.$$

Von *A. Mayer* ist, um die Gleichungen (7.), (8.) herzuleiten, ein anderes Verfahren eingeschlagen worden. Derselbe differenziert den Ausdruck

(3.) $V'(t, c, b)$ partiell nach den c und b, ebenso W' (4.), worin die q durch die Ausdrücke Nr. 1 (7.) gegeben sind, und leitet hierdurch ein lineares Gleichungssystem her, welches die Determinante D' zur Determinante der Koeffizienten hat. Aus diesem Gleichungssystem folgen dann die Gleichungen (7.) und (8.).

Die in Nr. 3 zur Herstellung und Berechnung von W gegebene Diskussion gilt ebenso für W'.

Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen.

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

In der linearen Differenzengleichung

$$(A)\qquad y(x+m)+x^k P_1 y(x+m-1)+x^{2k} P_2 y(x+m-2)+\cdots + x^{(m-1)k} P_{m-1} y(x+1)+x^{mk} P_m y(x)=0$$

sei k eine positive oder negative (nicht notwendig ganze) Zahl einschließlich Null und

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \cdots \qquad (i=1,\ldots m)$$

eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, welche für große Werte von $|x|$ konvergiert, oder eine Funktion von x, welche für große reelle positive Werte von x durch die als divergent vorausgesetzte Potenzreihe asymptotisch dargestellt wird. Wenn die Wurzeln $\alpha_1,\ldots\alpha_m$ der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

voneinander und von Null verschieden sind, so wird die Gleichung (A) *durch m Reihen*

$$S_i = (\Gamma(x+1))^k \alpha_i^x x^{\varrho_i}\left(1+\frac{A_{i1}}{x}+\frac{A_{i2}}{x^2}+\cdots\right) \qquad (i=1,\ldots m)$$

formell befriedigt. Die Differenzengleichung (A) *besitzt m linear unabhängige Integrale $y_1,\ldots y_m$, welche für große reelle positive Werte von x die asymptotischen Gleichungen*

$$y_i \backsim S_i \qquad (i=1,\ldots m)$$

befriedigen.

Den ausgesprochenen Satz habe ich früher*) unter der beschränkenden Voraussetzung bewiesen, daß auch die absoluten Beträge der

*) Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen (Math. Annalen, Bd. 53).

m Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ der charakteristischen Gleichung verschieden sind. Ich habe mich dabei auf die Methode gestützt, welche Herr *Poincaré* im 7. Bd. des American Journal benutzt hat, um zu zeigen, daß im Falle $k=0$

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y(x+1)}{y(x)}$$

im allgemeinen gleich α_1, ausnahmsweise gleich einer der Größen $\alpha_2, \ldots \alpha_m$ ist.

Neuere Arbeiten über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen für große Werte der Veränderlichen*) haben mich zu nochmaliger Beschäftigung mit dem Gegenstande veranlaßt.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung (§§ 1—5) beweise ich den am Eingang ausgesprochenen Satz, ohne die absoluten Beträge von $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ als verschieden vorauszusetzen, wie dies durch meine frühere Beweismethode bedingt war. Ich benutze jetzt eine Methode sukzessiver Annäherungen, die sich bei der entsprechenden Untersuchung über lineare Differentialgleichungen**) als besonders zweckmäßig erwiesen hat.

Während ich in den genannten Arbeiten über lineare Differentialgleichungen unter Zugrundelegung komplexer Werte der unabhängigen Veränderlichen mein Augenmerk auf das Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der Stelle $x=\infty$ richtete, kommen bei der Untersuchung der Integrale von Differenzengleichungen zunächst nur reelle positive (oder, wenn man will, nur ganze positive) Werte der unabhängigen Veränderlichen in Betracht. Will man die Integrale linearer Differentialgleichungen nur für große positive Werte der unabhängigen Veränderlichen untersuchen

---

*) *Ford*, Sur les équations linéaires aux différences finies (Annali di Matematica, Serie 3, Bd. 13). — *Perron*, Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen (Math. Annalen, Bd. 66). — *Perron*, Über einen Satz des Herrn *Poincaré* (Dieses Journal, Bd. 136). — *Galbrun*, Sur la représentation asymptotique des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris, 5. April 1909). — Während der Ausarbeitung des vorliegenden Aufsatzes erschien: *Ford*, On the integration of the homogeneous linear difference equation of second order (Transactions of the Amer. Math. Soc., Bd. 10).

**) Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris, 17. Jan. 1898). — Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelst sukzessiver Annäherungen (Arch. d. Math., 3. Reihe, Bd. 4). — Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen (Dieses Journal, Bd. 133).

(während alle übrigen Größen komplex sein dürfen), so kann man, wie im zweiten Abschnitt (§§ 6—9) gezeigt wird, die im ersten Abschnitt für Differenzengleichungen dargestellte Methode auf Differentialgleichungen übertragen.

Man erhält so den folgenden Satz:

Die lineare Differentialgleichung

$$(B) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2k} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0,$$

worin k eine ganze positive Zahl (einschließlich Null) und

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \cdots \qquad (i=1, \ldots m)$$

eine (konvergente oder asymptotische) Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ *ist, wird, wenn die Wurzeln* $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ *der charakteristischen Gleichung*

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

voneinander verschieden sind, durch die m Thoméschen Normalreihen

$$S_i = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i}\left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (i=1, \ldots m)$$

formell befriedigt. Es sind m linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung (B) *vorhanden, welche für große reelle positive Werte von x die asymptotische Darstellung*

$$y_i \backsim S_i \qquad (i=1, \ldots m)$$

zulassen.

Verwandt mit der Methode der sukzessiven Annäherungen ist die Methode zur Integration linearer Differentialgleichungen, welche Herr *Dini* im Jahre 1899 dargestellt und auch zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale für große reelle positive Werte der Veränderlichen benutzt hat*). Ich zeige im dritten Abschnitt (§§ 10—11), daß sich die *Dini*sche Methode so ausgestalten läßt, daß sie dieselben Ergebnisse liefert, die wir durch die Methode der sukzessiven Annäherungen erhalten haben.

Herr *Ford* hat (1907) die Methode *Dini*s auf Differenzengleichungen übertragen. Durch Ausgestaltung der *Ford*schen Methode könnte man zu den

*) *Dini*, Studî sulle equazioni differenziali lineari (Annali di Matematica, 3. Serie, Bd. 2 u. 3).

Resultaten gelangen, welche sich in §§ 1—5 aus der Methode der sukzessiven Annäherungen ergeben haben. Auf die Beziehungen zwischen dem vorliegenden Aufsatze und den oben angeführten Arbeiten über lineare Differenzengleichungen wird in § 12 hingewiesen.

Erster Abschnitt.

§ 1.

Die lineare Differenzengleichung m-ter Ordnung

$$(A_1) \qquad y(x+m)+P_1 y(x+m-1)+P_2 y(x+m-2)+\cdots + P_{m-1} y(x+1)+P_m y(x)=0$$

habe als Koeffizienten Potenzreihen

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \cdots \qquad (i=1,\ldots m)$$

von $\frac{1}{x}$, welche für hinreichend große Werte von $|x|$ konvergieren, oder Funktionen P_i von x, welche für große positive Werte von x durch divergente Potenzreihen asymptotisch dargestellt werden; in beiden Fällen ist, wenn n irgendeine ganze positive Zahl bedeutet,

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \cdots + \frac{a_i^{(n)}}{x^n} + \frac{\pi_i^{(n)}}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \pi_i^{(n)} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

habe die voneinander und von Null verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, die wir uns so geordnet denken, daß

$$|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq \ldots \geqq |\alpha_m| > 0$$

ist. Die Differenzengleichung (A_1) wird durch die m (im allgemeinen divergenten) Reihen

$$S_i = \alpha_i^x x^{\varrho_i}\left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (i=1,\ldots m)$$

formell befriedigt; dabei ist

$$\varrho_i = -\frac{a_1' \alpha_i^{m-1} + \cdots + a_{m-1}' \alpha_i + a_m'}{\alpha_i (m\alpha_i^{m-1} + (m-1) a_1 \alpha_i^{m-2} + \cdots + a_{m-1})}. \qquad (i=1,\ldots m)$$

Indem wir unter n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ verstehen, führen wir die ganzen Funktionen n-ten Grades von $\frac{1}{x}$ ein:

$$\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \cdots + \frac{A_{in}}{x^n}. \qquad (i=1,\ldots m)$$

Die Funktionen

$$\varphi_i = \alpha_i^x\, x^{\varrho_i}\, \Phi_i\Big(\frac{1}{x}\Big) \qquad (i=1,\dots m)$$

genügen der linearen Differenzengleichung m-ter Ordnung

$$D_1(y) = 0,$$

wo

$$D_1(y) = (-1)^m \frac{\begin{vmatrix} y(x), & \varphi_1(x), & \dots, \varphi_m(x) \\ y(x+1), & \varphi_1(x+1), & \dots, \varphi_m(x+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(x+m), & \varphi_1(x+m), & \dots, \varphi_m(x+m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \dots, \varphi_m(x) \\ \varphi_1(x+1), & \dots, \varphi_m(x+1) \\ \dots & \dots \\ \varphi_1(x+m-1), & \dots, \varphi_m(x+m-1) \end{vmatrix}}$$

$$= y(x+m) + p_1 y(x+m-1) + \dots + p_{m-1} y(x+1) + p_m y(x)$$

gesetzt ist. Indem wir die Bezeichnung

$$D(y) = y(x+m) + P_1 y(x+m-1) + \dots + P_{m-1} y(x+1) + P_m y(x)$$

und

$$D_2(y) = D_1(y) - D(y) = (p_1 - P_1)\, y(x+m-1) + \dots + (p_{m-1} - P_{m-1})\, y(x+1) + (p_m - P_m)\, y(x)$$

benutzen, schreiben wir die Differenzengleichung (A_1)

$$D(y) = 0$$

in der Form

$$D_1(y) = D_2(y).$$

Wenn man

$$D(S_i) = \alpha_i^x\, x^{\varrho_i}\Big(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots\Big)$$

setzt, so dient die Gleichung $C_1 = 0$, nach dem für α_i eine bestimmte Wurzel der Gleichung

$$C_0 = \alpha_i^m + a_1\, \alpha_i^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

gewählt ist, zur Bestimmung von ϱ_i; aus der Gleichung $C_2 = 0$ wird A_{i1} usw., aus der Gleichung $C_{n+1} = 0$ A_{in} berechnet. Da die Größen $C_0, C_1, \dots$ C_{n+1} von $A_{i,n+1}$, $A_{i,n+2}, \dots$ nicht abhängen, so sind die Gleichungen $C_0 = 0$, $C_1 = 0, \dots C_{n+1} = 0$ auch dann erfüllt, wenn man $A_{i,n+1}$, $A_{i,n+2}, \dots$ durch Null, also S_i durch φ_i ersetzt.

Demnach ist

$$D(\varphi_i) = -\alpha_i^x\, x^{\varrho_i - n - 2}\, \mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

wo $\mathfrak{q}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Wegen

$$D_1(\varphi_i) = 0$$

ist

$$D_2(\varphi_i) = -D(\varphi_i) = (p_1 - P_1)\,\varphi_i(x+m-1) + \cdots + (p_m - P_m)\,\varphi_i(x)$$
$$= \alpha_i^x\, x^{\varrho_i - n - 2}\, \mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big). \qquad (i=1,\ldots m)$$

Wir setzen

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \varphi_1(x+1), & \ldots, & \varphi_m(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x+m-1), & \ldots, & \varphi_m(x+m-1) \end{vmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_m)^x\, x^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}\, \Phi\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

wo Φ eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{x}$ ist, welche für $x = \infty$ nicht verschwindet. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der letzten Zeile der Determinante Δ mit $\Delta_1, \ldots \Delta_m$, so ist

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = \alpha_i^{-x}\, x^{-\varrho_i}\, \mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad (i=1,\ldots m)$$

wo $\mathfrak{p}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Aus dem obigen Ausdruck für $D_2(\varphi_i)$ folgt

$$p_1 - P_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{x^{n+2}}, \cdots p_m - P_m = \frac{\mathfrak{P}_m}{x^{n+2}},$$

wo $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_m$ Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind.

Wir verstehen unter λ eine der Zahlen $1, \ldots m$ und setzen

$$u_0 = \varphi_\lambda;$$

aus den Gleichungen

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

berechnen wir nacheinander $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Wenn u_ν bekannt ist, erhält man $u_{\nu+1}$ durch Integration einer linearen, nichthomogenen Differenzengleichung in der Form

$$u_{\nu+1} = \varphi_1 \sum_{\xi_1}^{x} D_2(u_\nu)\,\frac{\Delta_1}{\Delta} + \cdots + \varphi_m \sum_{\xi_m}^{x} D_2(u_\nu)\,\frac{\Delta_m}{\Delta},$$

und man hat weiter

$$D_2(u_{\nu+1}) = D_2(\varphi_1) \sum_{\xi_1}^{x} D_2(u_\nu)\,\frac{\Delta_1}{\Delta} + \cdots + D_2(\varphi_m) \sum_{\xi_m}^{x} D_2(u_\nu)\,\frac{\Delta_m}{\Delta}.$$

Dabei ist ξ_i $(i=1, \dots m)$ eine noch geeignet zu wählende positive Zahl, und unter

$$\sum_{\xi}^{x} f(x) = F(x)$$

ist eine Funktion zu verstehen, welche der Gleichung

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

genügt und für $x=\xi$ verschwindet. Demnach hat man, wenn $x-\xi$ eine ganze positive Zahl ist,

$$F(x) = f(\xi) + f(\xi+1) + \cdots + f(x-2) + f(x-1).$$

Wenn die Reihe

$$\sum_{x}^{\infty} f(x) = f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \cdots$$

für hinreichend große positive x konvergent ist, so können wir $\xi = \infty$ annehmen und

$$F(x) = \sum_{\infty}^{x} f(x) = -\sum_{x}^{\infty} f(x)$$

setzen.

§ 2.

Aus

$$u_0 = \varphi_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\varrho\lambda} \Phi_\lambda\left(\frac{1}{x}\right)$$

folgt

$$D_2(u_0) = \alpha_\lambda^x x^{\varrho\lambda - n - 2} F_0(x), \quad F_0(x) = \mathfrak{q}_\lambda\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wenn wir

$$D_2(u_\nu) = \alpha_\lambda^x x^{\varrho\lambda - n - 2} F_\nu(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

setzen und die Bezeichnung

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_\lambda}, \quad \sigma_i = \varrho_i - \varrho_\lambda \qquad (i = 1, \dots m)$$

benutzen, so haben wir die Rekursionsformeln

$$u_{\nu+1} \alpha_\lambda^{-x} x^{-\varrho\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^x x^{\sigma_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{\xi_i}^{x} \beta_i^{-x} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$

und

$$F_{\nu+1}(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^x x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{\xi_i}^{x} \beta_i^{-x} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wir nehmen zunächst an, daß die absoluten Beträge der Größen $\alpha_1, \dots \alpha_m$ voneinander verschieden sind. Dann ist

$$|\beta_1| > \cdots > |\beta_{\lambda-1}| > 1, \quad \beta_\lambda = 1, \quad 1 > |\beta_{\lambda+1}| > \cdots > |\beta_m| > 0.$$

Indem wir unter x_0 eine hinreichend große positive Zahl verstehen, nehmen wir

$$\xi_1 = \cdots = \xi_{\lambda-1} = \xi_\lambda = \infty, \quad \xi_{\lambda+1} = \cdots = \xi_m = x_0$$

an, so daß wir die Rekursionsformel haben:

$$F_{\nu+1}(x) = -\sum_{i=1}^{\lambda} \beta_i^x x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{x}^{\infty} \beta_i^{-x} x^{-\sigma_i-n-2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \sum_{i=\lambda+1}^{m} \beta_i^x x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{x_0}^{x} \beta_i^{-x} x^{-\sigma_i-n-2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x \geqq x_0$ sei

$$\left|\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq M, \quad \left|\mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq N, \quad \left|\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq \mathfrak{N},$$

wo $M, N, \mathfrak{N}$ endliche positive Größen sind. Es ist also

$$|F_0(x)| \leqq N.$$

Wir weisen nach, daß für $x \geqq x_0$

$$|F_\nu(x)| \leqq N \frac{(MNK)^\nu}{x_0^{(\nu-1)(n+1)}\, x^{n+1}} \leqq N\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu$$

ist, wo K eine später anzugebende positive Größe darstellt. Wir zeigen nämlich, daß, wenn diese Ungleichung erfüllt ist, auf Grund der Rekursionsformel die entsprechende Ungleichung für $|F_{\nu+1}(x)|$ gilt.

Es ist

$$|\beta_i^x| = |\beta_i|^x, \quad |x^{\sigma_i}| = x^{\bar{\sigma}_i},$$

wenn der reelle Teil von σ_i mit $\bar{\sigma}_i$ bezeichnet wird. Also ergibt sich aus der Rekursionsformel:

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{\lambda} N\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu MN \cdot |\beta_i|^x x^{\bar{\sigma}_i} \sum_{x}^{\infty} |\beta_i|^{-v} v^{-\bar{\sigma}_i-n-2}$$
$$+ \sum_{i=\lambda+1}^{m} N\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu MN \cdot |\beta_i|^x x^{\bar{\sigma}_i} \sum_{x_0}^{x} |\beta_i|^{-v} v^{-\bar{\sigma}_i-n-2}.$$

Nun ist für $v \geqq x \geqq x_0$

$$v^{-n-2} = \frac{1}{v(v+1)\cdots(v+n+1)}\left(1+\frac{1}{v}\right)\cdots\left(1+\frac{n+1}{v}\right)$$
$$\leqq \frac{1}{v(v+1)\cdots(v+n+1)}\left(1+\frac{1}{x_0}\right)\cdots\left(1+\frac{n+1}{x_0}\right) = \frac{1+\delta}{v(v+1)\cdots(v+n+1)}.$$

Aus

$$\sum_{x}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)\cdots(v+n+1)} = \frac{1}{(n+1)\,x(x+1)\cdots(x+n)} < \frac{1}{(n+1)\,x^{n+1}}$$

folgt

$$\sum_{x}^{\infty} v^{-n-2} < \frac{1+\delta}{(n+1)\,x^{n+1}}.$$

Für $i=1, \dots \lambda$ ist $|\beta_i| \geqq 1$ (für $i=\lambda$ ist $\beta_i=1, \sigma_i=0$); es ist also

$$|\beta_i|^x x^{\bar{\sigma}_i} \leqq |\beta_i|^v v^{\bar{\sigma}_i}$$

für $v \geqq x \geqq x_0$ (wenn x_0 hinreichend groß), und demnach,

$$|\beta_i|^x x^{\bar{\sigma}_i} \sum_{x}^{\infty} |\beta_i|^{-v} v^{-\bar{\sigma}_i} \cdot v^{-n-2} \leqq \sum_{x}^{\infty} v^{-n-2} < \frac{1+\delta}{(n+1)\,x^{n+1}}.$$

Für $i=\lambda+1, \dots m$ ist $|\beta_i|<1$. Durch die Substitution

$$v = x-u$$

erhält man

$$|\beta_i|^x x^{\bar{\sigma}_i} \sum_{x_0}^{x} |\beta_i|^{-v} v^{-\bar{\sigma}_i-n-2} = x^{-n-2} \sum_{0}^{x-x_0} |\beta_i|^u \Big(1-\frac{u}{x}\Big)^{-\bar{\sigma}_i-n-2}$$

$$= x^{-n-2} \sum_{0}^{x-x_0} |\beta_i|^{\frac{1}{2}u}\, e^{\psi_i(u)},$$

wo

$$\psi_i(u) = \frac{1}{2}\,u \log|\beta_i| - (\bar{\sigma}_i+n+2)\log\Big(1-\frac{u}{x}\Big)$$

ist. Wegen $v=x-u \geqq x_0$ ist

$$\psi_i'(u) = \frac{1}{2}\log|\beta_i| + \frac{\bar{\sigma}_i+n+2}{x-u} \leqq \frac{1}{2}\log|\beta_i| + \frac{\bar{\sigma}_i+n+2}{x_0} \leqq 0,$$

falls

$$x_0 \geqq \frac{\bar{\sigma}_i+n+2}{-\frac{1}{2}\log|\beta_i|}$$

ist, was wir voraussetzen dürfen. Dann ist $\psi_i(u) \leqq \psi_i(0)=0$, also

$$e^{\psi_i(u)} \leqq 1$$

und

$$\sum_{0}^{x-x_0} |\beta_i|^{\frac{1}{2}u} e^{\psi_i(u)} \leqq \sum_{0}^{x-x_0} |\beta_i|^{\frac{1}{2}u} \leqq \sum_{0}^{\infty} |\beta_i|^{\frac{1}{2}u} = \frac{1}{1-|\beta_i|^{\frac{1}{2}}} \leqq \frac{1}{1-\delta'}.$$

Demnach ist für $i=\lambda+1, \dots m$

$$|\beta_i|^x x^{\bar{\sigma}_i} \sum_{x_0}^{x} |\beta_i|^{-v} v^{-\bar{\sigma}_i-n-2} \leqq \frac{1}{1-\delta'}\,\frac{1}{x^{n+2}} \leqq \frac{1}{(1-\delta')\,x_0}\,\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Setzt man

$$K = \frac{\lambda(1+\delta)}{n+1} + \frac{m-\lambda}{(1-\delta')\,x_0},$$

so ist

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq N \cdot \Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^{\nu} \cdot MN \cdot \frac{K}{x^{n+1}} = N \cdot \frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}\,x^{n+1}} \leqq N\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^{\nu+1},$$

w. z. b. w.

Aus der Formel

$$u_{\nu+1}\alpha_\lambda^{-x}x^{-\varrho\lambda} = -\sum_{i=1}^{\lambda}\beta_i^x x^{\sigma_i}\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{x}^{\infty}\beta_i^{-x}x^{-\sigma_i-n-2}F_\nu(x)\,\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\sum_{i=\lambda+1}^{m}\beta_i^x x^{\sigma_i}\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{x_0}^{x}\beta_i^{-x}x^{-\sigma_i-n-2}F_\nu(x)\,\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$

folgt ebenso

$$|u_{\nu+1}\alpha_\lambda^{-x}x^{-\varrho\lambda}| \leqq \mathfrak{N}\frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}x^{n+1}} \leqq \mathfrak{N}\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu+1}.$$

§ 3.

Wegen

$$|u_\nu\,\alpha_\lambda^{-x}x^{-\varrho\lambda}| \leqq \mathfrak{N}\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu}$$

ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu\,\alpha_\lambda^{-x}x^{-\varrho\lambda}$$

für $x \geqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent, falls

$$x_0 > \sqrt[n+1]{MNK}$$

angenommen wird. Durch die Gleichung

$$y_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$$

wird die Funktion y_λ für $x \geqq x_0$ definiert. Setzt man

$$y_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\varrho\lambda}\left(\Phi_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}}\right),$$

so ist für $x \geqq x_0$

$$\frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu+1}\,\alpha_\lambda^{-x}x^{-\varrho\lambda}, \quad \text{also}$$
$$\left|\frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}}\right| \leqq \mathfrak{N}\frac{MNK}{x^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu} \quad \text{oder}$$
$$|\gamma_\lambda| \leqq \mathfrak{N}\,MNK\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu}.$$

Der absolute Betrag von γ_λ bleibt also für $x \geqq x_0$ unter einer endlichen Größe.

Aus

$$D_1(u_0+u_1+\cdots+u_{\nu+1}) = D_2(u_0+u_1+\cdots+u_\nu)$$

folgt für $\lim \nu = \infty$

$$D_1(y_\lambda) = D_2(y_\lambda) \quad \text{oder} \quad D(y_\lambda) = 0;$$

d. h. y_λ stellt ein Integral der Differenzengleichung (A_1) dar. Die m Integrale $y_1, \ldots y_m$ bilden ein Fundamentalsystem, denn die Determinante

$$\mathfrak{D}=\begin{vmatrix} y_1(x), & \dots, y_m(x) \\ y_1(x+1), & \dots, y_m(x+1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ y_1(x+m-1), & \dots, y_m(x+m-1) \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht für alle x. Es ist nämlich

$$\alpha_i^{-x}\, x^{-\varrho_i}\, y_i(x+\mu)=\alpha_i^{\mu}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{\varrho_i}\left(\Phi_i\left(\frac{1}{x+\mu}\right)+\frac{\gamma_i(x+\mu)}{(x+\mu)^{n+1}}\right),$$

$$\text{also}\qquad \lim_{x=\infty} \alpha_i^{-x}\, x^{-\varrho_i}\, y_i(x+\mu)=\alpha_i^{\mu}$$

und demnach

$$\lim_{x=\infty} (\alpha_1 \cdots \alpha_m)^{-x}\, x^{-(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)}\,\mathfrak{D}=\begin{vmatrix} 1, & \dots, 1 \\ \alpha_1, & \dots, \alpha_m \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \alpha_1^{m-1}, & \dots, \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

Bisher war n eine von vornherein beliebig gewählte, aber dann festgehaltene ganze Zahl. Um zu zeigen, daß das Integral y_λ durch die Reihe S_λ asymptotisch dargestellt wird, verstehen wir unter $\tilde{n}$ eine beliebige ganze Zahl, welche größer ist als n, und bilden mit Benutzung dieser Zahl $\tilde{n}$ ein Fundamentalsystem

$$\tilde{y}_\lambda=\alpha_\lambda^x\, x^{\varrho_\lambda}\left(\tilde{\Phi}_\lambda+\frac{\tilde{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right) \qquad (\lambda=1,\dots m)$$

der Differenzengleichung (A_1) in derselben Weise, wie das Fundamentalsystem y_λ mit Benutzung der Zahl n gebildet wurde. Dabei ist

$$\tilde{\Phi}_\lambda=1+\frac{A_{\lambda 1}}{x}+\cdots+\frac{A_{\lambda\tilde{n}}}{x^{\tilde{n}}};$$

der absolute Betrag von $\tilde{\gamma}_\lambda$ bleibt für große x endlich.

Es ist

$$y_\lambda=c_1\,\tilde{y}_1+\cdots+c_m\,\tilde{y}_m$$

oder nach Multiplikation mit $\alpha_1^{-x}\, x^{-\varrho_1}$

$$\left(\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_\lambda-\varrho_1}\left(\Phi_\lambda+\frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}}\right)=c_1\left(\tilde{\Phi}_1+\frac{\tilde{\gamma}_1}{x^{\tilde{n}+1}}\right)+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_2-\varrho_1}\left(\tilde{\Phi}_2+\frac{\tilde{\gamma}_2}{x^{\tilde{n}+1}}\right)+\cdots;$$

für $\lim x=\infty$ folgt hieraus $c_1=0$; ähnlich findet man $c_2=\cdots=c_{\lambda-1}=0$. Aus

$$y_\lambda=c_\lambda\,\tilde{y}_\lambda+\cdots+c_m\,\tilde{y}_m$$

erhält man durch Multiplikation mit $\alpha_\lambda^{-x}\, x^{-\varrho_\lambda}$:

$$\Phi_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}} = c_\lambda\left(\tilde{\Phi}_\lambda + \frac{\tilde{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + c_{\lambda+1}\left(\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\alpha_\lambda}\right)^x x^{\varrho_{\lambda+1}-\varrho_\lambda}\left(\tilde{\Phi}_{\lambda+1} + \frac{\tilde{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + \cdots;$$

für lim $x=\infty$ ergibt sich hieraus $c_\lambda = 1$. Demnach ist

$$y_\lambda = \tilde{y}_\lambda + c_{\lambda+1}\tilde{y}_{\lambda+1} + \cdots + c_m \tilde{y}_m$$

oder nach Einsetzung der Ausdrücke für $\tilde{y}_\lambda, \tilde{y}_{\lambda+1}, \cdots$

$$y_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(1 + \frac{A_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{A_{\lambda\tilde{n}}}{x^{\tilde{n}}} + \frac{\tilde{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + c_{\lambda+1}\,\alpha_{\lambda+1}^x x^{\varrho_{\lambda+1}}\left(\tilde{\Phi}_{\lambda+1} + \frac{\tilde{\gamma}_{\lambda+1}}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + \cdots$$

$$= \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(1 + \frac{A_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{A_{\lambda\tilde{n}}}{x^{\tilde{n}}} + \frac{\bar{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right),$$

wo

$$\bar{\gamma}_\lambda = \tilde{\gamma}_\lambda + c_{\lambda+1}\left(\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\alpha_\lambda}\right)^x x^{\varrho_{\lambda+1}-\varrho_\lambda-\tilde{n}-1}\left(\tilde{\Phi}_{\lambda+1} + \frac{\tilde{\gamma}_{\lambda+1}}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + \cdots$$

für große x endlich bleibt.

Damit ist die asymptotische Darstellung des Integrals $y_\lambda (\lambda = 1, \ldots m)$ der Differenzengleichung (A_1) durch die Reihe S_λ bewiesen.

§ 4.

Wenn die absoluten Beträge der Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ nicht sämtlich verschieden sind, so bedürfen die Entwicklungen von § 2 und § 3 einiger Ergänzungen.

Die Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ seien so geordnet, daß entweder $|\alpha_i| > |\alpha_{i+1}|$ oder $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}|$, $\bar{\varrho}_i \geqq \bar{\varrho}_{i+1}$ ist. Es sei

$$|\alpha_1| \geqq \cdots \geqq |\alpha_p| > |\alpha_{p+1}| = |\alpha_{p+2}| = \cdots = |\alpha_q| > |\alpha_{q+1}| \geqq \cdots \geqq |\alpha_m|,$$

$$\bar{\varrho}_{p+1} \geqq \bar{\varrho}_{p+2} \geqq \cdots \geqq \bar{\varrho}_q,$$

und λ sei eine der Zahlen $p+1, \ldots q$. Dann ist

$$|\beta_1| \geqq \cdots \geqq |\beta_p| > 1, \quad |\beta_{p+1}| = \cdots = |\beta_q| = 1, \quad 1 > |\beta_{q+1}| \geqq \cdots \geqq |\beta_m|,$$

$$\bar{\sigma}_{p+1} \geqq \cdots \geqq \bar{\sigma}_{\lambda-1} \geqq 0 \geqq \bar{\sigma}_{\lambda+1} \geqq \cdots \geqq \bar{\sigma}_q.$$

Wir setzen

$$\xi_1 = \cdots = \xi_q = \infty, \quad \xi_{q+1} = \cdots = \xi_m = x_0,$$

so daß wir die Rekursionsformel haben:

$$F_{\nu+1}(x) = -\sum_{i=1}^{q} \beta_i^x x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{x}^{\infty} \beta_i^{-x} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+ \sum_{i=q+1}^{m} \beta_i^x x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{x_0}^{x} \beta_i^{-x} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es ist eine Zahl $r \geqq \lambda$ so vorhanden, daß $\bar{\sigma}_r = 0$, $\bar{\sigma}_{r+1} < 0$ ist. Die zu $i = 1, \ldots r$ und die zu $i = q+1, \ldots m$ gehörenden Glieder der m-gliedrigen Summe für $F_{\nu+1}(x)$ werden wie in § 2 behandelt.

Wir verstehen jetzt unter i eine der Zahlen $r+1, \dots q$. Das i-te Glied der Summe für $F_{\nu+1}(x)$ ist höchstens gleich

$$N\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu} MN \cdot x^{\bar{\sigma}_i} \sum_x^{\infty} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}.$$

Wir nehmen

$$n > -\bar{\sigma}_q - 1$$

an, damit

$$\bar{\sigma}_i + n + 2 \geqq \bar{\sigma}_q + n + 2 > 1$$

wird und die Reihe

$$\sum_x^{\infty} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}$$

konvergiert.

Nach der *Stirling*schen Formel ist

$$\log \Gamma(v) \backsim \left(v - \frac{1}{2}\right) \log v - v + \log \sqrt{2\pi} + \cdots,$$

$$\log \Gamma(v+\varrho) \backsim \left(v + \varrho - \frac{1}{2}\right) \log v - v + \log \sqrt{2\pi} + \cdots,$$

also

$$\log \Gamma(v) - \log \Gamma(v+\varrho) \backsim -\varrho \log v + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder für $\lim v = +\infty$ verschwinden. Demnach ist

$$v^{-\varrho} = \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v+\varrho)} (1 + \delta(v)), \quad \lim_{v=\infty} \delta(v) = 0.$$

Wenn $\varrho > 1$ ist, besteht die Gleichung

$$\sum_x^{\infty} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v+\varrho)} = \frac{1}{\varrho - 1} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varrho-1)};$$

denn wenn die rechte Seite dieser Gleichung mit $F(x)$ bezeichnet wird, so ist

$$F(x+1) - F(x) = -\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varrho)}.$$

Hiernach ist für $x \geqq x_0$

$$\sum_x^{\infty} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2} = \sum_x^{\infty} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v + \bar{\sigma}_i + n + 2)} (1 + \delta(v)) \leqq (1+\delta) \sum_x^{\infty} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v + \bar{\sigma}_i + n + 2)}$$

$$= \frac{1+\delta}{\bar{\sigma}_i + n + 1} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \bar{\sigma}_i + n + 1)} \leqq \frac{1+\delta}{\bar{\sigma}_i + n + 1} \frac{x^{-\bar{\sigma}_i - n - 1}}{1 - \varepsilon} \leqq \eta\, x^{-\bar{\sigma}_i - n - 1},$$

wo η eine positive Konstante ist. Schließlich haben wir

$$x^{\bar{\sigma}_i} \sum_x^{\infty} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2} \leqq \frac{\eta}{x^{n+1}}.$$

Setzt man

$$K = \frac{r(1+\delta)}{n+1} + (q-r)\,\eta + \frac{(m-q)}{(1-\delta')\,x_0},$$

so hat man für $F_{\nu+1}(x)$ dieselbe Ungleichung wie in § 2.

Die weiteren Schlüsse gestalten sich wie in § 2 und § 3; nur der Zusammenhang zwischen den beiden Fundamentalsystemen $y_1, \dots y_m$ und $\tilde{y}_1, \dots \tilde{y}_m$ muß nochmals hergeleitet werden, wenigstens für den Fall, daß für gewisse Werte i die beiden Gleichungen $|\alpha_{i+1}| = |\alpha_i|$, $\overline{\varrho}_{i+1} = \overline{\varrho}_i$ zusammen bestehen.

Zur Erläuterung der anzuwendenden Methode nehmen wir beispielsweise an, es sei $|\alpha_1| = \dots = |\alpha_l|$, $\overline{\varrho}_1 = \dots = \overline{\varrho}_l$, aber, wenn $i > l$ ist, entweder $|\alpha_i| < |\alpha_1|$ oder $|\alpha_i| = |\alpha_1|$, $\overline{\varrho}_i < \overline{\varrho}_1$. Indem wir die Gleichung

$$y_\lambda(x+\mu) = c_1 \tilde{y}_1(x+\mu) + \dots + c_m \tilde{y}_m(x+\mu) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

mit $\alpha_1^{-x} x^{-\varrho_1}$ multiplizieren und die Formeln

$$y_i(x+\mu) = \alpha_i^x x^{\varrho_i} \cdot \alpha_i^\mu (1 + \varepsilon_i^{(\mu)}), \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon_i^{(\mu)} = 0,$$

$$\tilde{y}_i(x+\mu) = \alpha_i^x x^{\varrho_i} \cdot \alpha_i^\mu (1 + \tilde{\varepsilon}_i^{(\mu)}), \quad \lim_{x=\infty} \tilde{\varepsilon}_i^{(\mu)} = 0$$

anwenden, erhalten wir

$$\left(\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_\lambda - \varrho_1} \cdot \alpha_\lambda^\mu (1 + \varepsilon_\lambda^{(\mu)}) = c_1 \alpha_1^\mu (1 + \tilde{\varepsilon}_1^{(\mu)}) + c_2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_2 - \varrho_1} \cdot \alpha_2^\mu (1 + \tilde{\varepsilon}_2^{(\mu)}) + \dots.$$

Im Falle $\lambda > l$ verschwindet die linke Seite dieser Gleichung für $x = \infty$. Wir geben der Gleichung die Form

$$c_1 \alpha_1^\mu + c_2 \alpha_2^\mu \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_2 - \varrho_1} + \dots + c_l \alpha_l^\mu \left(\frac{\alpha_l}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_l - \varrho_1} = \varepsilon^{(\mu)},$$

wo $\lim_{x=\infty} \varepsilon^{(\mu)} = 0$ ist. Aus den zu $\mu = 0, 1, \dots l-1$ gehörigen l Gleichungen berechnet man $c_1, \dots c_l$ als lineare homogene Funktionen von $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \dots \varepsilon^{(l-1)}$ mit Koeffizienten, welche für $x = \infty$ nicht unendlich werden; denn die Determinante der Koeffizienten von $c_1, \dots c_l$,

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \dots \frac{\alpha_l}{\alpha_1}\right)^x x^{(\varrho_2 - \varrho_1) + \dots + (\varrho_l - \varrho_1)} \cdot \begin{vmatrix} 1, & \dots, 1 \\ \alpha_1, & \dots, \alpha_l \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_1^{l-1}, & \dots, \alpha_l^{l-1} \end{vmatrix},$$

ist von Null verschieden. So erscheinen $c_1, \dots c_l$ als Funktionen von x, welche für $x = \infty$ verschwinden; sie sind aber konstant, also gleich Null. — Ist λ eine der Zahlen $1, \dots l$, so haben wir Gleichungen von der Form

$$c_1 \alpha_1^\mu + c_2 \alpha_2^\mu \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_2 - \varrho_1} + \dots + (c_\lambda - 1) \alpha_\lambda^\mu \left(\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_1}\right)^x x^{\varrho_\lambda - \varrho_1} + \dots = \varepsilon^{(\mu)}, \qquad (\mu = 0, 1, \dots l-1)$$

wo wieder $\lim_{x=\infty} \varepsilon^{(\mu)} = 0$ ist; daraus folgt $c_1 = 0, \dots c_{\lambda-1} = 0$, $c_\lambda = 1$, $c_{\lambda+1} = 0, \dots c_l = 0$. Es besteht also die Gleichung

$$y_\lambda = \tilde{y}_\lambda + c_{l+1}\,\tilde{y}_{l+1} + \cdots + c_m\,\tilde{y}_m = \alpha_\lambda^x\, x^{\varrho_\lambda}\Big(1 + \frac{A_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{A_{\lambda\tilde{n}}}{x^{\tilde{n}}} + \frac{\bar{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\Big),$$

wo

$$\bar{\gamma}_\lambda = \tilde{\gamma}_\lambda + c_{l+1}\Big(\frac{a_{l+1}}{a_\lambda}\Big)^x x^{\varrho_{l+1}-\varrho_\lambda-\tilde{n}-1}\Big(\tilde{\Phi}_{l+1} + \frac{\tilde{\gamma}_{l+1}}{x^{\tilde{n}+1}}\Big) + \cdots$$

für große x unter einer endlichen Größe bleibt.

Damit ist die Gültigkeit der asymptotischen Gleichungen

$$y_i \backsim S_i \qquad (i=1,\ldots m)$$

bewiesen.

§ 5.

Wir gehen jetzt zu der allgemeineren Differenzengleichung

$$(\mathrm{A}) \quad y(x+m) + x^k P_1 y(x+m-1) + x^{2k} P_2 y(x+m-2) + \cdots + x^{mk} P_m y(x) = 0$$

über, worin k eine positive oder negative (nicht notwendig ganze) Zahl und

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \cdots \qquad (i=1,\ldots m)$$

eine konvergente oder asymptotische Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist; die Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

sollen voneinander und von Null verschieden sein.

Die Gleichung (A)

$$y(x+m) + (x+m)^k P_1' y(x+m-1)$$
$$+ (x+m)^k (x+m-1)^k P_2' y(x+m-2) + \cdots = 0,$$

wo

$$P_i' = \Big(1 + \frac{m}{x}\Big)^{-k} \cdots \Big(1 + \frac{m-i+1}{x}\Big)^{-k} P_i \qquad (i=1,\ldots m)$$

eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist, wird durch die Substitution

$$y(x) = y'(x)\,(\Gamma(x+1))^k$$

in die nach §§ 1—4 zu behandelnde Differenzengleichung

$$y'(x+m) + P_1' y'(x+m-1) + P_2' y'(x+m-2) + \cdots = 0$$

übergeführt.

Die Differenzengleichung (A) wird demnach durch m Reihen

$$S_i = (\Gamma(x+1))^k\, \alpha_i^x\, x^{\varrho_i}\Big(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \cdots\Big) \qquad (i=1,\ldots m)$$

formell befriedigt; sie besitzt m linear unabhängige Integrale $y_1, \dots y_m$, welche für große positive Werte von x die asymptotischen Gleichungen erfüllen:

$$y_i \backsim S_i. \qquad (i = 1, \dots m)$$

Zweiter Abschnitt.

§ 6.

In der linearen Differentialgleichung

$$(B) \qquad D(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2k} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0$$

sei k eine ganze positive Zahl (einschl. 0) und

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \dots \qquad (i = 1, \dots m)$$

eine für hinreichend große Werte von $|x|$ konvergente Potenzreihe (oder eine Funktion, welche für große positive x durch die als divergent vorausgesetzte Potenzreihe asymptotisch dargestellt wird). Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0.$$

habe m verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \dots \alpha_m$, die wir uns so geordnet denken, daß

$$\Re(\alpha_1) \geqq \Re(\alpha_2) \geqq \dots \geqq \Re(\alpha_m)$$

ist. Die Differentialgleichung (B) wird durch m (im allgemeinen divergente) *Thomé*sche Normalreihen

$$S_i = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i} \left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \dots\right) \qquad (i = 1, \dots m).$$

formell befriedigt, wo

$$g_i(x) = \alpha_i \frac{x^{k+1}}{k+1} + \alpha_{i1} \frac{x^k}{k} + \dots + \alpha_{ik} x \qquad (i = 1, \dots m).$$

eine ganze Funktion $(k+1)$-ten Grades ist.

Die Funktionen

$$\varphi_i = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right), \quad \Phi_i = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \dots + \frac{A_{in}}{x^n} \qquad (i = 1, \dots m)$$

genügen der Differentialgleichung

$$D_1(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + x^k p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + x^{mk} p_m y = 0.$$

Wir setzen

$$D_2(y) = D_1(y) - D(y) = x^k (p_1 - P_1) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + x^{mk} (p_m - P_m) y,$$

so daß die Differentialgleichung (B) die Form erhält:

$$D_1(y) = D_2(y).$$

Setzt man

$$D(S_i) = e^{\varrho_i(x)} x^{\varrho_i + mk} \Big(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots \Big),$$

so dienen die Gleichungen $C_0 = 0$, $C_1 = 0, \ldots C_k = 0$, $C_{k+1} = 0$ zur Bestimmung der Größen $\alpha_i, \alpha_{i1}, \ldots \alpha_{ik}, \varrho_i$; hierauf erhält man $A_{i1}, \ldots A_{in}$ aus den Gleichungen $C_{k+2} = 0, \ldots C_{k+n+1} = 0$. Wenn man S_i durch φ_i, also $A_{i,n+1}, A_{i,n+2}, \ldots$ durch 0 ersetzt, so sind die Gleichungen $C_0 = 0$, $C_1 = 0, \ldots$ $C_{k+n+1} = 0$ ebenfalls erfüllt, so daß

$$D_2(\varphi_i) = -D(\varphi_i) = e^{\varrho_i(x)} x^{\varrho_i + (m-1)k - n - 2} \mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

ist, wo $\mathfrak{q}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Hieraus folgen die Gleichungen

$$p_i - P_i = \frac{\mathfrak{P}_i}{x^{k+n+2}}, \qquad (i = 1, \ldots m)$$

wo $\mathfrak{P}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist. Wenn die Unterdeterminanten der letzten Zeile der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \ldots, \varphi_m \\ \varphi_1', & \ldots, \varphi_m' \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{(m-1)}, & \ldots, \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = e^{\varrho_1(x) + \cdots + \varrho_m(x)} x^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m + \frac{m(m-1)}{2} k} \Phi\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

mit $\Delta_1, \ldots \Delta_m$ bezeichnet werden, so ist

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-\varrho_i(x)} x^{-\varrho_i - (m-1)k} \mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad (i = 1, \ldots m)$$

wo $\mathfrak{p}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ bedeutet.

Wir setzen

$$u_0 = \varphi_\lambda,$$

wo λ eine der Zahlen $1, \ldots m$ ist, und berechnen $u_1, u_2, \ldots$ aus den Gleichungen

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wir erhalten so

$$u_{\nu+1} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \int_{\xi_i}^{x} D_2(u_\nu) \frac{\Delta_i}{\Delta} dx$$

und

formell befriedigt; sie besitzt m linear unabhängige Integrale $y_1, \dots y_m$, welche für große positive Werte von x die asymptotischen Gleichungen erfüllen:

$$y_i \backsim S_i. \qquad (i = 1, \dots m)$$

Zweiter Abschnitt.

§ 6.

In der linearen Differentialgleichung

$$(B) \qquad D(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2k} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0$$

sei k eine ganze positive Zahl (einschl. 0) und

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \dots \qquad (i = 1, \dots m)$$

eine für hinreichend große Werte von $|x|$ konvergente Potenzreihe (oder eine Funktion, welche für große positive x durch die als divergent vorausgesetzte Potenzreihe asymptotisch dargestellt wird). Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0.$$

habe m verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \dots \alpha_m$, die wir uns so geordnet denken, daß

$$\Re(\alpha_1) \geqq \Re(\alpha_2) \geqq \dots \geqq \Re(\alpha_m)$$

ist. Die Differentialgleichung (B) wird durch m (im allgemeinen divergente) *Thomé*sche Normalreihen

$$S_i = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i} \left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \dots\right) \qquad (i = 1, \dots m).$$

formell befriedigt, wo

$$g_i(x) = \alpha_i \frac{x^{k+1}}{k+1} + \alpha_{i1} \frac{x^k}{k} + \dots + \alpha_{ik} x \qquad (i = 1, \dots m).$$

eine ganze Funktion $(k+1)$-ten Grades ist.

Die Funktionen

$$\varphi_i = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right), \quad \Phi_i = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \dots + \frac{A_{in}}{x^n} \qquad (i = 1, \dots m)$$

genügen der Differentialgleichung

$$D_1(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + x^k p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + x^{mk} p_m y = 0.$$

Wir setzen

$$D_2(y) = D_1(y) - D(y) = x^k (p_1 - P_1) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + x^{mk} (p_m - P_m) y,$$

so daß die Differentialgleichung (B) die Form erhält:

$$D_1(y) = D_2(y).$$

Setzt man

$$D(S_i) = e^{\varrho_i(x)} x^{\varrho_i + mk} \Big(C + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots \Big),$$

so dienen die Gleichungen $C_0 = 0$, $C_1 = 0, \ldots C_k = 0$, $C_{k+1} = 0$ zur Bestimmung der Größen $\alpha_i, \alpha_{i1}, \ldots \alpha_{ik}, \varrho_i$; hierauf erhält man $A_{i1}, \ldots A_{in}$ aus den Gleichungen $C_{k+2} = 0, \ldots C_{k+n+1} = 0$. Wenn man S_i durch φ_i, also $A_{i,n+1}, A_{i,n+2}, \ldots$ durch 0 ersetzt, so sind die Gleichungen $C_0 = 0$, $C_1 = 0, \ldots C_{k+n+1} = 0$ ebenfalls erfüllt, so daß

$$D_2(\varphi_i) = -D(\varphi_i) = e^{\varrho_i(x)} x^{\varrho_i + (m-1)k - n - 2} \mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

ist, wo $\mathfrak{q}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Hieraus folgen die Gleichungen

$$p_i - P_i = \frac{\mathfrak{P}_i}{x^{k+n+2}}, \qquad (i = 1, \ldots m)$$

wo $\mathfrak{P}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist. Wenn die Unterdeterminanten der letzten Zeile der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \cdots, & \varphi_m \\ \varphi_1', & \cdots, & \varphi_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(m-1)}, & \cdots, & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = e^{\varrho_1(x) + \cdots + \varrho_m(x)} x^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m + \frac{m(m-1)}{2} k} \Phi\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

mit $\Delta_1, \ldots \Delta_m$ bezeichnet werden, so ist

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-\varrho_i(x)} x^{-\varrho_i - (m-1)k} \mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad (i = 1, \ldots m)$$

wo $\mathfrak{p}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ bedeutet.

Wir setzen

$$u_0 = \varphi_\lambda,$$

wo λ eine der Zahlen $1, \ldots m$ ist, und berechnen $u_1, u_2, \ldots$ aus den Gleichungen

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wir erhalten so

$$u_{\nu+1} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \int_{\xi_i}^{x} D_2(u_\nu) \frac{\Delta_i}{\Delta} dx$$

und

$$D_2(u_{\nu+1}) = \sum_{i=1}^{m} D_2(\varphi_i) \int_{\xi_i}^{x} D_2(u_\nu) \frac{\Delta_i}{\Delta} dx;$$

wir verstehen unter ξ_i einen hinreichend großen reellen positiven Wert oder ∞ und legen der Veränderlichen x nur große reelle positive Werte bei.

§ 7.

Es ist

$$D_2(u_0) = D_2(\varphi_\lambda) = e^{g_\lambda(x)} x^{\varrho_\lambda + (m-1)k - n - 2} F_0(x), \quad F_0(x) = \mathfrak{q}_\lambda\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wir setzen

$$D_2(u_\nu) = e^{g_\lambda(x)} x^{\varrho_\lambda + (m-1)k - n - 2} F_\nu(x)$$

und benutzen die Bezeichnung

$$\beta_i = \alpha_i - \alpha_\lambda, \quad \beta_{i1} = \alpha_{i1} - \alpha_{\lambda 1}, \ldots \beta_{ik} = \alpha_{ik} - \alpha_{\lambda k}; \quad \sigma_i = \varrho_i - \varrho_\lambda,$$

$$h_i(x) = g_i(x) - g_\lambda(x) = \beta_i \frac{x^{k+1}}{k+1} + \beta_{i1} \frac{x^k}{k} + \cdots + \beta_{ik} x.$$

Die Rekursionsformeln schreiben sich

$$u_{\nu+1} e^{-g_\lambda(x)} x^{-\varrho_\lambda} = \sum_{i=1}^{m} e^{h_i(x)} x^{\sigma_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{\xi_i}^{x} e^{-h_i(x)} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

$$F_{\nu+1}(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{h_i(x)} x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{\xi_i}^{x} e^{-h_i(x)} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Die reellen Teile der Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ sollen vorläufig voneinander verschieden sein. Dann ist, wenn der reelle Teil der Größe a mit $\bar{a}$ bezeichnet wird,

$$\bar{\beta}_1 > \cdots > \bar{\beta}_{\lambda-1} > 0, \quad \beta_\lambda = 0, \quad 0 > \bar{\beta}_{\lambda+1} > \cdots > \bar{\beta}_m.$$

Wenn wir

$$\xi_1 = \cdots = \xi_{\lambda-1} = \xi_\lambda = \infty, \quad \xi_{\lambda+1} = \cdots = \xi_m = x_0$$

setzen, wo x_0 eine hinreichend große reelle positive Größe ist, so haben wir die Rekursionsformel

$$F_{\nu+1}(x) = -\sum_{i=1}^{\lambda} e^{h_i(x)} x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{x}^{\infty} e^{-h_i(x)} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ \sum_{i=\lambda+1}^{m} e^{h_i(x)} x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{x_0}^{x} e^{-h_i(x)} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Wenn für $x \geqq x_0$

$$\left|\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq M, \quad \left|\mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq N, \quad \left|\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq \mathfrak{N}, \quad \text{also}$$

$$|F_0(x)| \leqq N$$

ist, so ist, wie wir durch den Schluß von ν auf $\nu+1$ beweisen, für $x \geqq x_0$

$$|F_\nu(x)| \leqq N \frac{(MNK)^\nu}{x_0^{(\nu-1)(n+1)}\, x^{n+1}} \leqq N\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^\nu.$$

Nehmen wir diese Ungleichung als bewiesen an, so folgt aus der Rekursionsformel:

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{\lambda} N\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^\nu MN \cdot e^{\bar{h}_i(x)} x^{\bar{\sigma}_i} \int_x^\infty e^{-\bar{h}_i(v)} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv$$

$$+ \sum_{i=\lambda+1}^{m} N\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^\nu MN \cdot e^{\bar{h}_i(x)} x^{\bar{\sigma}_i} \int_{x_0}^x e^{-\bar{h}_i(v)} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv.$$

Wenn i eine der Zahlen $1, \dots \lambda$ ist, so ist für $v \geqq x \geqq x_0$ (x_0 hinreichend groß)

$$e^{\bar{h}_i(x)} x^{\bar{\sigma}_i} \leqq e^{\bar{h}_i(v)} v^{\bar{\sigma}_i},$$

also

$$e^{\bar{h}_i(x)} x^{\bar{\sigma}_i} \int_x^\infty e^{-\bar{h}_i(v)} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv \leqq \int_x^\infty v^{-n-2}\, dv = \frac{1}{(n+1)x^{n+1}}.$$

Für $i = \lambda+1, \dots m$ erhält man, wenn man

$$u = x^{k+1} - v^{k+1}$$

setzt,

$$W_i(x) = e^{\bar{h}_i(x)} x^{\bar{\sigma}_i} \int_{x_0}^x e^{-\bar{h}_i(v)} v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv$$

$$= \frac{1}{(k+1)x^{n+k+2}} \int_0^{x^{k+1} - x_0^{k+1}} \Big\{ e^{\frac{\bar{\beta}_i u}{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\bar{\beta}_{i,k+1-\nu} \cdot x^\nu}{\nu} \left[\left(1 - \frac{u}{x^{k+1}}\right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \right]}$$

$$\times \Big(1 - \frac{u}{x^{k+1}}\Big)^{-\bar{\sigma}_i - n - k - 2} \Big\}\, du.$$

Der Ausdruck

$$\frac{\bar{\beta}_{i,k+1-\nu}}{\nu} \frac{\Big(1 - z^{\frac{k+1}{\nu}}\Big)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1}{z} \qquad (\nu = 1, \dots k)$$

liegt für $0 \leqq z \leqq 1$ unter einer endlichen Größe $M_{i\nu}$; setzt man den zwischen 0 und 1 gelegenen Wert

$$z = \frac{u^{\frac{\nu}{k+1}}}{x^\nu},$$

so hat man

$$\frac{\bar{\beta}_{i,k+1-\nu} \cdot x^\nu}{\nu} \left[\left(1 - \frac{u}{x^{k+1}}\right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \right] \leqq M_{i\nu} u^{\frac{\nu}{k+1}}.$$

Demnach ist

$$W_i(x) \leqq \frac{\omega_i(x)}{(k+1)\,x^{n+k+2}},$$

$$\omega_i(x) = \int_0^{x^{k+1}-x_0^{k+1}} e^{\frac{\bar{\beta}_i u}{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k} M_{i\nu} u^{\frac{\nu}{k+1}} - (\bar{\sigma}_i+n+k+2)\log\left(1-\frac{u}{x^{k+1}}\right)} du$$

$$= \int_0^{x^{k+1}-x_0^{k+1}} e^{\varphi_i(u)} e^{\psi_i(u)}\, du$$

unter Anwendung der Bezeichnung

$$\varphi_i(u) = \frac{\bar{\beta}_i u}{2(k+1)} + \sum_{\nu=1}^{k} M_{i\nu} u^{\frac{\nu}{k+1}},$$

$$\psi_i(u) = \frac{\bar{\beta}_i u}{2(k+1)} - (\bar{\sigma}_i+n+k+2)\,\log\left(1-\frac{u}{x^{k+1}}\right).$$

Man hat

$$\psi_i'(u) = \frac{\bar{\beta}_i}{2(k+1)} + \frac{\bar{\sigma}_i+n+k+2}{x^{k+1}-u} \leqq \frac{\bar{\beta}_i}{2(k+1)} + \frac{\bar{\sigma}_i+n+k+2}{x^{k+1}}.$$

Wenn $\bar{\sigma}_i+n+k+2>0$ ist, so nehmen wir

$$x_0 \geqq \sqrt[k+1]{\frac{2(k+1)(\bar{\sigma}_i+n+k+2)}{-\bar{\beta}_i}}$$

an. Dann ist $\psi_i'(u) \leqq 0$, so daß für $u \geqq 0$ $\psi_i(u) \leqq \psi_i(0) = 0$, also

$$e^{\psi_i(u)} \leqq 1$$

ist. Demnach ist

$$\omega_i(x) \leqq \int_0^{x^{k+1}-x_0^{k+1}} e^{\varphi_i(u)}\, du \leqq \int_0^{\infty} e^{\varphi_i(u)}\, du = \omega_i$$

endlich, da $\bar{\beta}_i<0$ ist. Wir haben also

$$W_i(x) \leqq \frac{\omega_i}{(k+1)\,x^{n+k+2}} \leqq \frac{\omega_i}{(k+1)\,x_0^{k+1}\,x^{n+1}}.$$

Wenn man

$$K = \frac{\lambda}{n+1} + \frac{\sum_{i=\lambda+1}^{m} \omega_i}{(k+1)\,x_0^{k+1}}$$

setzt, so ist

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq N\,\frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}\,x^{n+1}} \leqq N\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu},$$

w. z. b. w.

Aus der Formel, welche $u_{\nu+1}$ durch $F_\nu(x)$ ausdrückt, ergibt sich ebenso

$$|u_{\nu+1}\, e^{-g_\lambda(x)}\, x^{-\varrho_\lambda}| \leqq \mathfrak{N}\frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}\, x^{n+1}} \leqq \mathfrak{N}\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^\nu.$$

§ 8.

Indem man die Reihe S_i μ-mal formal nach x differenziert, erhält man die Reihe

$$S_i^{(\mu)} = e^{g_i(x)}\, x^{\varrho_i+\mu k}\Big(\alpha_i^\mu + \frac{A_{i1}^{(\mu)}}{x} + \frac{A_{i2}^{(\mu)}}{x^2} + \cdots\Big). \qquad (i=1,\ldots m)$$

Wir setzen

$$\varphi_i^{(\mu)} = e^{g_i(x)}\, x^{\varrho_i+\mu k}\, \Phi_i^{(\mu)}\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad \Phi_i^{(\mu)} = \alpha_i^\mu + \frac{A_{i1}^{(\mu)}}{x} + \cdots + \frac{A_{in}^{(\mu)}}{x^n},$$

$$\frac{d^\mu \varphi_i}{dx^\mu} = e^{g_i(x)}\, x^{\varrho_i+\mu k}\, \Psi_i^{(\mu)}\Big(\frac{1}{x}\Big);$$

$\Psi_i^{(\mu)}$ unterscheidet sich von $\Phi_i^{(\mu)}$ durch Glieder mit $x^{-(n+1)}, \ldots$. Für $x \geqq x_0$ sei

$$|\Psi_i^{(\mu)}| \leqq \mathfrak{N}^{(\mu)},$$

also $\mathfrak{N}^{(0)} = \mathfrak{N}$. Es ist

$$\frac{d^\mu u_{\nu+1}}{dx^\mu} = \sum_{i=1}^m \frac{d^\mu \varphi_i}{dx^\mu} \int_{\xi_i}^x D_2(u_\nu)\, \frac{\Delta_i}{\Delta}\, dx, \qquad (\mu=1,\ldots m-1)$$

$$\frac{d^m u_{\nu+1}}{dx^m} = \sum_{i=1}^m \frac{d^m \varphi_i}{dx^m} \int_{\xi_i}^x D_2(u_\nu)\, \frac{\Delta_i}{\Delta}\, dx + D_2(u_\nu),$$

also

$$\frac{d^\mu u_{\nu+1}}{dx^\mu}\, e^{-g_\lambda(x)}\, x^{-\varrho_\lambda-\mu k} = \sum_{i=1}^m e^{h_i(x)}\, x^{\sigma_i}\, \Psi_i^{(\mu)}\Big(\frac{1}{x}\Big) \int_{\xi_i}^x e^{-h_i(x)}\, x^{-\sigma_i-n-2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)\, dx, \qquad (\mu=1,\ldots m-1)$$

$$\frac{d^m u_{\nu+1}}{dx^m}\, e^{-g_\lambda(x)}\, x^{-\varrho_\lambda-mk} = \sum_{i=1}^m e^{h_i(x)}\, x^{\sigma_i}\, \Psi_i^{(\mu)}\Big(\frac{1}{x}\Big) \int_{\xi_i}^x e^{-h_i(x)}\, x^{-\sigma_i-n-2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)\, dx$$
$$+ x^{-k-n-2}\, F_\nu(x).$$

Daraus folgt

$$\Big|\frac{d^\mu u_{\nu+1}}{dx^\mu}\, e^{-g_\lambda(x)}\, x^{-\varrho_\lambda-\mu k}\Big| \leqq \mathfrak{N}^{(\mu)}\frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}\, x^{n+1}} \leqq \mathfrak{N}^{(\mu)}\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^{\nu+1}, \qquad (\mu=1,\ldots m-1)$$

ferner, wenn

$$\bar{\mathfrak{N}}^{(m)} = \mathfrak{N}^{(m)} + \frac{1}{MK\, x_0^{k+1}}$$

gesetzt wird,

$$\Big|\frac{d^m u_{\nu+1}}{dx^m}\, e^{-g_\lambda(x)}\, x^{-\varrho_\lambda-mk}\Big| \leqq \bar{\mathfrak{N}}^{(m)}\frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}\, x^{n+1}} \leqq \bar{\mathfrak{N}}^{(m)}\Big(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\Big)^{\nu+1}.$$

Die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^\mu u_\nu}{dx^\mu} \qquad (\mu=1,2,\dots m)$$

sind hiernach, wenn

$$x_0 > \sqrt[n+1]{MNK}$$

angenommen wird, absolut konvergent und zwar gleichmäßig in jedem dem Bereich $(x_0 \cdots \infty)$ angehörigen endlichen Intervall. Setzt man

$$y_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu ,$$

so ist

$$\frac{d^\mu y_\lambda}{dx^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^\mu u_\nu}{dx^\mu} .$$

Aus der Gleichung

$$D_1(u_0+u_1+\cdots+u_{\nu+1}) = D_2(u_0+u_1+\cdots+u_\nu)$$

folgt für $\nu=\infty$

$$D_1(y_\lambda) = D_2(y_\lambda),$$

d. h. y_λ stellt ein Integral der Differentialgleichung (B) dar.

Setzt man

$$y_\lambda = e^{\vartheta_\lambda(x)}\, x^{\varrho_\lambda}\left(\Phi_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}}\right),$$

so ist

$$\frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu+1}\, e^{-\vartheta_\lambda(x)}\, x^{-\varrho_\lambda},$$

also

$$|\gamma_\lambda| \leqq \mathfrak{N} MNK \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu,$$

so daß $|\gamma_\lambda|$ für $x \geqq x_0$ unter einer endlichen Größe bleibt. Dasselbe gilt für $|\gamma_\lambda^{(\mu)}|$, wenn man

$$\frac{d^\mu y_\lambda}{dx^\mu} = e^{\vartheta_\lambda(x)}\, x^{\varrho_\lambda+\mu k}\left(\Phi_\lambda^{(\mu)} + \frac{\gamma_\lambda^{(\mu)}}{x^{n+1}}\right)$$

setzt.

Die Integrale $y_1, \dots y_m$ der Differentialgleichung (B) bilden ein Fundamentalsystem, da die Determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} y_1, & \cdots, & y_m \\ \frac{dy_1}{dx}, & \cdots, & \frac{dy_m}{dx} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, & \cdots, & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Es ist nämlich

$$\lim_{x=\infty} e^{-g_i(x)} x^{-\varrho_i-\mu k} \frac{d^\mu y_i}{dx^\mu} = \alpha_i^\mu,$$

also

$$\lim_{x=\infty} e^{-g_1(x)-\cdots-g_m(x)} x^{-\varrho_1-\cdots-\varrho_m-\frac{m(m-1)}{2}k} \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1, & \ldots, 1 \\ \alpha_1, & \ldots, \alpha_m \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_1^{m-1}, & \ldots, \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Um zu zeigen, daß die Funktion y_i durch die Reihe S_i und die Funktion $\frac{d^\mu y_i}{dx^\mu}$ durch die Reihe $S_i^{(\mu)}$ asymptotisch dargestellt wird, bilden wir unter Zugrundelegung der willkürlich angenommenen Zahl $\tilde{n} > n$ die Integrale

$$\tilde{y}_i = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i}\left(\tilde{\Phi}_i + \frac{\tilde{\gamma}_i}{x^{\tilde{n}+1}}\right), \qquad (i=1, \ldots m)$$

wo

$$\tilde{\Phi}_i = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \cdots + \frac{A_{i\tilde{n}}}{x^{\tilde{n}}}$$

ist und $|\tilde{\gamma}_i|$ für große positive x endlich bleibt. Es besteht eine Gleichung

$$y_\lambda = c_1 \tilde{y}_1 + \cdots + c_m \tilde{y}_m$$

mit konstanten Koeffizienten $c_1, \ldots c_m$. Durch Multiplikation mit $e^{-g_1(x)} x^{-\varrho_1}$ erhält man

$$e^{g_\lambda(x)-g_1(x)} x^{\varrho_\lambda-\varrho_1}\left(\Phi_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}}\right) = c_1\left(\tilde{\Phi}_1 + \frac{\tilde{\gamma}_1}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + c_2 e^{g_2(x)-g_1(x)} x^{\varrho_2-\varrho_1}\left(\tilde{\Phi}_2 + \frac{\tilde{\gamma}_2}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + \cdots$$

und hieraus für $\lim x = \infty$, falls $\lambda > 1$ ist, $c_1 = 0$; entsprechend ergibt sich $c_2 = 0, \ldots c_{\lambda-1} = 0$. Wenn man die Gleichung

$$y_\lambda = c_\lambda \tilde{y}_\lambda + c_{\lambda+1} \tilde{y}_{\lambda+1} + \cdots$$

mit $e^{-g_\lambda(x)} x^{-\varrho_\lambda}$ multipliziert, so erhält man

$$\Phi_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{x^{n+1}} = c_\lambda\left(\tilde{\Phi}_\lambda + \frac{\tilde{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + c_{\lambda+1} e^{g_{\lambda+1}(x)-g_\lambda(x)} x^{\varrho_{\lambda+1}-\varrho_\lambda}\left(\tilde{\Phi}_{\lambda+1} + \frac{\tilde{\gamma}_{\lambda+1}}{x^{\tilde{n}+1}}\right) + \cdots$$

und hieraus, indem man x unendlich werden läßt, $c_\lambda = 1$. Es ist demnach

$$y_\lambda = \tilde{y}_\lambda + c_{\lambda+1} \tilde{y}_{\lambda+1} + \cdots + c_m \tilde{y}_m = e^{g_\lambda(x)} x^{\varrho_\lambda}\left(\tilde{\Phi}_\lambda + \frac{\bar{\gamma}_\lambda}{x^{\tilde{n}+1}}\right),$$

wo

$$\bar{\gamma}_\lambda = \tilde{\gamma}_\lambda + \sum_{i=\lambda+1}^{m} c_i e^{g_i(x)-g_\lambda(x)} x^{\varrho_i-\varrho_\lambda+\tilde{n}+1}\left(\tilde{\Phi}_i + \frac{\tilde{\gamma}_i}{x^{\tilde{n}+1}}\right)$$

für große x endlich bleibt. Ebenso ergibt sich

$$\frac{d^u y_\lambda}{dx^u} = e^{g_\lambda(x)} x^{\varrho_\lambda + \mu k}\left(\tilde{\Phi}_\lambda^{(u)} + \frac{\bar{\gamma}_\lambda^{(u)}}{x^{n+1}}\right),$$

wo $\bar{\gamma}_\lambda^{(u)}$ für große x unter einer endlichen Größe bleibt.

§ 9.

Wir nehmen jetzt an, daß die reellen Teile von $\alpha_1, \dots \alpha_m$ nicht sämtlich verschieden sind.

Die Größen $\alpha_1, \dots \alpha_m$ seien so geordnet, daß für hinreichend große Werte von x

$$\bar{g}_1(x) + \bar{\varrho}_1 \log x \geqq \bar{g}_2(x) + \bar{\varrho}_2 \log x \geqq \cdots \geqq \bar{g}_m(x) + \bar{\varrho}_m \log x$$

oder

$$e^{\bar{g}_1(x)} x^{\bar{\varrho}_1} \geqq e^{\bar{g}_2(x)} x^{\bar{\varrho}_2} \geqq \cdots \geqq e^{\bar{g}_m(x)} x^{\bar{\varrho}_m}$$

ist. Es sei

$$\bar{\alpha}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{\alpha}_p > \bar{\alpha}_{p+1} = \bar{\alpha}_{p+2} = \cdots = \bar{\alpha}_q > \bar{\alpha}_{q+1} \geqq \cdots \geqq \bar{\alpha}_m$$

und λ sei eine der Zahlen $p+1, \dots q$; dann ist

$$\bar{\beta}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{\beta}_p > 0, \quad \bar{\beta}_{p+1} = \bar{\beta}_{p+2} = \cdots = \bar{\beta}_q = 0, \quad 0 > \bar{\beta}_{q+1} \geqq \cdots \geqq \bar{\beta}_m.$$

Für $i = p+1, \dots r$ sei die erste nicht verschwindende unter den Größen $\bar{\beta}_{i1}, \dots \bar{\beta}_{ik}$ positiv, oder es sei $\bar{\beta}_{i1} = \cdots = \bar{\beta}_{ik} = 0$, $\bar{\sigma}_i \geqq 0$, so daß

$$e^{\bar{h}_i(x)} x^{\bar{\sigma}_i}$$

mit wachsendem x nicht abnimmt, falls x hinreichend groß genommen wird; für $i = r+1, \dots s$ sei $\bar{\beta}_{i1} = \cdots = \bar{\beta}_{ik} = 0, \bar{\sigma}_i < 0$; für $i = s+1, \dots q$ habe die erste der Größen $\bar{\beta}_{i1}, \dots \bar{\beta}_{ik}$, welche nicht verschwindet, einen negativen Wert.

Wir benutzen, indem wir

$$\xi_1 = \cdots = \xi_s = \infty, \quad \xi_{s+1} = \cdots = \xi_m = x_0$$

setzen, die Rekursionsformel

$$F_{\nu+1}(x) = -\sum_{i=1}^{s} e^{h_i(x)} x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_x^\infty e^{-h_i(x)} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ \sum_{i=s+1}^{m} e^{h_i(x)} x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{x_0}^x e^{-h_i(x)} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Die zu $i = 1, \dots p$ und die zu $i = q+1, \dots m$ gehörigen Glieder der Summe werden wie in § 7 behandelt. Ist i eine der Zahlen $p+1, \dots r$, so ist für $v \geqq x \geqq x_0$

$$e^{\bar{h}_i(x)}\, x^{\bar{\sigma}_i} \leqq e^{\bar{h}_i(v)}\, v^{\bar{\sigma}_i},$$

so daß dieselben Schlüsse gelten wie für $i=1,\dots p$.

Ist i eine der Zahlen $r+1,\dots s$, also $\bar{h}_i(x)=0, -\bar{\sigma}_i>0$, so nehmen wir

$$n > -\bar{\sigma}_s - 1$$

an, so daß

$$\bar{\sigma}_i + n + 2 \geqq \bar{\sigma}_s + n + 2 > 1$$

wird und

$$\int_x^\infty v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv = \frac{1}{(\bar{\sigma}_i + n + 1)\, x^{\bar{\sigma}_i + n + 1}}$$

konvergiert. Dann ist

$$x^{\bar{\sigma}_i} \int_x^\infty v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv = \frac{1}{(\bar{\sigma}_i + n + 1)\, x^{n+1}} \leqq \frac{\eta}{x^{n+1}},$$

wo η eine positive Größe ist.

Ist i eine der Zahlen $s+1,\dots q$, so sei $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{i1} = \dots = \bar{\beta}_{i,l-1} = 0$, $\bar{\beta}_{il} < 0$, wobei $l \leqq k$ ist, also

$$\bar{h}_i(x) = \bar{\beta}_{il} \frac{x^{k+1-l}}{k+1-l} + \dots .$$

Durch Anwendung der Substitution

$$u = x^{k+1-l} - v^{k+1-l}$$

findet man wie in § 7 für $x \geqq x_0$

$$e^{\bar{h}_i(x)}\, x^{\bar{\sigma}_i} \int_{x_0}^{x} e^{-\bar{h}_i(v)}\, v^{-\bar{\sigma}_i - n - 2}\, dv \leqq \frac{\omega_i}{(k+1-l)\, x_0^{k+1-l}\, x^{n+1}} \leqq \frac{\omega_i}{(k+1)\, x_0^{k+1}\, x^{n+1}}.$$

Demnach haben wir, wenn

$$K = \frac{r}{n+1} + (s-r)\,\eta + \frac{\sum_{i=s+1}^{m} \omega_i}{(k+1)\, x_0^{k+1}}$$

gesetzt wird,

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq N \frac{(MNK)^{\nu+1}}{x_0^{\nu(n+1)}\, x^{n+1}} \leqq N \left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^{\nu+1}.$$

Von den weiteren in § 7 und § 8 angestellten Überlegungen bedürfen nur diejenigen der Änderung, welche sich auf die Darstellung des Integrals y_λ durch das Fundamentalsystem $\tilde{y}_1, \dots \tilde{y}_m$ beziehen, falls für gewisse Werte von i gleichzeitig $\bar{h}_i(x) = \bar{h}_{i+1}(x)$ und $\bar{\varrho}_{i+1} = \bar{\varrho}_i$ ist.

Es sei z. B. $\bar{g}_1(x) = \dots = \bar{g}_l(x)$, $\bar{\varrho}_1 = \dots = \bar{\varrho}_l$, aber

$$\lim_{x=\infty} e^{\bar{g}_i(x) - \bar{g}_1(x)}\, x^{\bar{\varrho}_i - \bar{\varrho}_1} = 0. \qquad (i > l)$$

Wir multiplizieren die Gleichung

$$\frac{d^\mu y_\lambda}{dx^\mu} = c_1 \frac{d^\mu y_1}{dx^\mu} + \cdots + c_m \frac{d^\mu \tilde{y}_m}{dx^\mu}$$

mit $e^{-g_1(x)} x^{-\varrho_1-\mu k}$ und setzen

$$\frac{d^\mu y_i}{dx^\mu} = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i+\mu k} \cdot \alpha_i^\mu (1+\varepsilon_i^{(\mu)}), \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon_i^{(\mu)} = 0,$$
$$\frac{d^\mu \tilde{y}_i}{dx^\mu} = e^{g_i(x)} x^{\varrho_i+\mu k} \cdot \alpha_i^\mu (1+\tilde{\varepsilon}_i^{(\mu)}), \quad \lim_{x=\infty} \tilde{\varepsilon}_i^{(\mu)} = 0,$$

wodurch sich ergibt:

$$e^{g_\lambda(x)-g_1(x)} x^{\varrho_\lambda-\varrho_1} \cdot \alpha_\lambda^\mu (1+\varepsilon_\lambda^{(\mu)}) = c_1 \alpha_1^\mu (1+\tilde{\varepsilon}_1^{(\mu)}) + c_2 e^{g_2(x)-g_1(x)} x^{\varrho_2-\varrho_1} \cdot \alpha_2^\mu (1+\tilde{\varepsilon}_2^{(\mu)}) + \cdots.$$

Für $\lambda > l$ schreiben wir diese Gleichung

$$c_1 \alpha_1^\mu + c_2 \alpha_2^\mu e^{g_2(x)-g_1(x)} x^{\varrho_2-\varrho_1} + \cdots + c_l \alpha_l^\mu e^{g_l(x)-g_1(x)} x^{\varrho_l-\varrho_1} = \varepsilon^{(\mu)},$$

wo $\lim_{x=\infty} \varepsilon^{(\mu)} = 0$ ist. Aus den zu $\mu = 0, 1, \ldots l$ gehörigen Gleichungen schließen wir, daß $c_1 = \cdots = c_l = 0$ ist. Für $i = 1, \ldots l$ haben wir Gleichungen von der Form

$$c_1 \alpha_1^\mu + c_2 \alpha_2^\mu e^{g_2(x)-g_1(x)} x^{\varrho_2-\varrho_1} + \cdots + (c_\lambda - 1) \alpha_\lambda^\mu e^{g_\lambda(x)-g_1(x)} x^{\varrho_\lambda-\varrho_1} + \cdots = \varepsilon^{(\mu)},$$

wo wieder $\lim_{x=\infty} \varepsilon^{(\mu)} = 0$ ist; daraus folgt $c_1 = 0, \ldots c_{\lambda-1} = 0$, $c_\lambda = 1$, $c_{\lambda+1} = 0, \ldots c_l = 0$. Demnach ist

$$y_\lambda = \tilde{y}_\lambda + c_{l+1} \tilde{y}_{l+1} + \cdots + c_m \tilde{y}_m = e^{g_\lambda(x)} x^{\varrho_\lambda} \left(1 + \frac{A_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{A_{\lambda \bar{n}}}{x^{\bar{n}}} + \frac{\bar{\gamma}_\lambda}{x^{\bar{n}+1}}\right),$$

wo

$$\bar{\gamma}_\lambda = \tilde{\gamma}_\lambda + \sum_{i=l+1}^{m} c_i e^{g_i(x)-g_\lambda(x)} x^{\varrho_i-\varrho_\lambda+\bar{n}+1} \left(\tilde{\Phi}_i + \frac{\tilde{\gamma}_i}{x^{\bar{n}+1}}\right)$$

für große x unter einer endlichen Größe bleibt.

Dritter Abschnitt.

§ 10.

Verwandt mit der bisher benutzten Methode der sukzessiven Annäherungen ist die Methode zur Integration der linearen Differentialgleichungen, welche Herr *Dini* in den Annali di Matematica, 3. Serie, Bd. 2 dargestellt hat. Wir stellen zunächst den Grundgedanken der *Dini*schen Methode dar, um im nächsten Paragraphen zu zeigen, wie die Ergebnisse von §§ 6—9 mit ihrer Hilfe hergeleitet werden können.

Es sei $D(y)$ der Differentialausdruck

$$D(y)=\frac{d^m y}{dx^m}+\pi_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+\pi_{m-1}\frac{dy}{dx}+\pi_m y,$$

welcher in den in § 6 mit $D(y)$ bezeichneten Differentialausdruck übergeht, wenn man

$$\pi_1=x^k P_1,\ \pi_2=x^{2k}P_2,\ \ldots\ \pi_{m-1}=x^{(m-1)k}P_{m-1},\ \pi_m=x^{mk}P_m$$

setzt. Der zu $D(y)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$E(z)=(-1)^m\frac{d^m z}{dx^m}+(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}(\pi_1 z)}{dx^{m-1}}+\cdots-\frac{d(\pi_{m-1}z)}{dx}+\pi_m z.$$

Es besteht die Identität*)

$$z\,D(y)-y\,E(z)=\frac{dL(y,z)}{dx},$$

wo der bilineare Differentialausdruck $L(y,z)$ sowohl in bezug auf y als auch in bezug auf z von der $(m-1)$-ten Ordnung ist. Es ist nämlich

$$L(y,z)=E_0(z)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+E_1(z)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+E_{m-1}(z)\,y;$$

$$E_0(z)=z,$$

$$E_1(z)=-\frac{dz}{dx}+\pi_1 z,$$

$$E_2(z)=\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d(\pi_1 z)}{dx}+\pi_2 z,$$

. . . . . .

$$E_{m-1}(z)=(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+(-1)^{m-2}\frac{d^{m-2}(\pi_1 z)}{dx^{m-2}}+\cdots-\frac{d(\pi_{m-2}z)}{dx}+\pi_{m-1}z.$$

Ist y eine Lösung der Differentialgleichung $D(y)=0$, so hat man, wenn ξ und c Konstante sind,

$$E_0(z)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}(z)\,y=-\int_\xi^x y\,E(z)\,dx-c.$$

Setzt man für z der Reihe nach die m Funktionen $z_1,\ldots z_m$ und für ξ und c bzw. die Werte $\xi_1,\ldots\xi_m$ und $c_1,\ldots c_m$, so hat man die m in bezug auf y und dessen Ableitungen der Ordnung $1,\ldots(m-1)$ linearen Gleichungen

$$E_0(z_i)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}(z_i)\,y=-\int_{\xi_i}^x y\,E(z_i)\,dx-c_i. \qquad (i=1,\ldots m)$$

---

*) Vgl. *Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 53 ff. wegen der benutzten Sätze über adjungierte Differentialgleichungen.

Daraus berechnet man

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} E_0(z_1), \ldots, E_{m-2}(z_1), \int_{\xi_1}^{x} y\,E(z_1)\,dx + c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_0(z_m), \ldots, E_{m-2}(z_m), \int_{\xi_m}^{x} y\,E(z_m)\,dx + c_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_0(z_1), \ldots, E_{m-1}(z_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_0(z_m), \ldots, E_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}}$$

oder durch Umformung der Determinanten

$$y=(-1)^m\frac{R}{Q};$$

dabei ist

$$Q=\begin{vmatrix} z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m-1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_m, z_m', \ldots, z_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad R=\begin{vmatrix} z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m-2)}, \int_{\xi_1}^{x} y\,E(z_1)\,dx + c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m, z_m', \ldots, z_m^{(m-2)}, \int_{\xi_m}^{x} y\,E(z_m)\,dx + c_m \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen $z_1, \ldots z_m$ denken wir uns so gewählt, daß die Determinante Q nicht identisch verschwindet. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der letzten Kolonne der Determinante Q mit $Q_1, \ldots Q_m$, so ist

$$R=\sum_{i=1}^{m} Q_i c_i + \sum_{i=1}^{m} Q_i \int_{\xi_i}^{x} y\,E(z_i)\,dx.$$

Demnach ist

$$(\alpha) \qquad y=(-1)^m\sum_{i=1}^{m}\frac{Q_i}{Q}c_i+(-1)^m\sum_{i=1}^{m}\frac{Q_i}{Q}\int_{\xi_i}^{x} y\,E(z_i)\,dx^*).$$

Man zeigt auch umgekehrt, daß eine dieser Gleichung genügende Funktion y der Differentialgleichung $D(y)=0$ genügt.

Die Reihe

$$y=u_0+u_1+u_2+\cdots$$

mit dem Anfangsglied

$$u_0=(-1)^m\sum_{i=1}^{m}\frac{Q_i}{Q}c_i$$

---

*) Wenn wie bei *Dini* $\xi_1=\cdots=\xi_m$ angenommen wird, so ist (α) eine Integralgleichung vom *Volterra*schen Typus.

und der Rekursionsformel

$$u_{\nu+1} = (-1)^m \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{Q} \int_{\xi_i}^{x} u_\nu E(z_i)\, dx \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt, wenn sie in einem gewissen Intervall gleichmäßig konvergiert, der Gleichung (α) und damit auch der Differentialgleichung $D(y) = 0$.

§ 11.

Bilden $y_1, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung, so berechnet man ein Fundamentalsystem $z_1, \ldots z_m$ der adjungierten Differentialgleichung aus den Gleichungen

$$(1.) \qquad \begin{cases} y_1 z_1 + \cdots + y_m z_m = 0, \\ y_1' z_1 + \cdots + y_m' z_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(m-2)} z_1 + \cdots + y_m^{(m-2)} z_m = 0, \\ y_1^{(m-1)} z_1 + \cdots + y_m^{(m-1)} z_m = 1; \end{cases}$$

es gelten auch die Gleichungen

$$(2.) \qquad \begin{cases} z_1 y_1 + \cdots + z_m y_m = 0, \\ z_1' y_1 + \cdots + z_m' y_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1^{(m-2)} y_1 + \cdots + z_m^{(m-2)} y_m = 0, \\ z_1^{(m-1)} y_1 + \cdots + z_m^{(m-1)} y_m = (-1)^{m-1}. \end{cases}$$

Es sei jetzt $D(y) = 0$ die in §§ 6—9 betrachtete Differentialgleichung (B). Setzt man in den Gleichungen (1.) an Stelle von y_i die der Differentialgleichung (B) formal genügende Reihe S_i, so tritt an die Stelle von z_i die der adjungierten Differentialgleichung $E(z) = 0$ formal genügende Reihe

$$T_i = e^{-\varrho_i(x)}\, x^{-\varrho_i - (m-1)k} \left(B_i + \frac{B_{i1}}{x} + \frac{B_{i2}}{x^2} + \cdots \right). \qquad (i = 1, \ldots m)$$

Ersetzt man in den Gleichungen (1.) y_i durch

$$\varphi_i = e^{\varrho_i(x)}\, x^{\varrho_i}\, \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right), \quad \Phi_i = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \cdots + \frac{A_{in}}{x^n},$$

so ist z_i durch

$$\psi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

zu ersetzen, wo $\Delta_1, \ldots \Delta_m$ wie in § 6 die Unterdeterminanten der letzten Zeile der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \dots, \varphi_m \\ \varphi_1', & \dots, \varphi_m' \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_1^{(m-1)}, & \dots, \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

sind. Die Funktionen $\varphi_1, \dots \varphi_m$ genügen der Differentialgleichung $D_1(y) = 0$, die Funktionen $\psi_1, \dots \psi_m$ der zu dieser adjungierten Differentialgleichung. Da auch die Gleichungen (2.) durch $z_i = \psi_i$, $y_i = \varphi_i$ erfüllt werden, so hat man, wenn man

$$z_i = \psi_i$$

setzt,

$$(-1)^{m-1} \frac{Q_i}{Q} = \varphi_i.$$

Demnach ist

$$u_0 = -\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i \quad \text{und} \quad u_{\nu+1} = -\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \int_{\xi_i}^{x} u_\nu E(\psi_i)\, dx. \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Setzt man, unter λ eine der Zahlen $1, \dots m$ verstehend,

$$c_1 = 0, \dots c_{\lambda-1} = 0, \; c_\lambda = -1, \; c_{\lambda+1} = 0, \dots c_m = 0,$$

so wird

$$u_0 = \varphi_\lambda;$$

berechnet man $u_1, u_2, \dots$ aus der angeschriebenen Rekursionsformel, so stellt die Reihe

$$y_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu,$$

falls sie konvergiert, eine Lösung der Differentialgleichung (B) dar.

Wie in § 6 hat man

$$\psi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-\vartheta_i(x)}\, x^{-\varrho_i-(m-1)k}\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right). \quad (i = 1, \dots m)$$

Der Formel

$$D(\varphi_i) = -e^{\vartheta_i(x)}\, x^{\varrho_i+(m-1)k-n-2}\, \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$

entspricht, wenn man D durch E, φ_i durch ψ_i ersetzt, die Formel

$$E(\psi_i) = -e^{-\vartheta_i(x)}\, x^{[-\varrho_i-(m-1)k]+(m-1)k-n-2}\, \mathfrak{r}_i\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -e^{-\vartheta_i(x)}\, x^{-\varrho_i-n-2}\, \mathfrak{r}_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\mathfrak{r}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt.

Setzt man

$$u_\nu = e^{\vartheta_\lambda(x)}\, x^{\varrho_\lambda}\, \mathfrak{F}_\nu(x), \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

so ist

$$\mathfrak{F}_0(x) = \Phi_\lambda\left(\frac{1}{x}\right),$$

und die oben aufgestellte Rekursionsformel schreibt sich unter Benutzung der in § 6 und § 7 eingeführten Bezeichnungen:

$$\mathfrak{F}_{\nu+1}(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{h_i(x)}\, x^{\sigma_i}\, \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{\xi_i}^{x} e^{-h_i(x)}\, x^{-\sigma_i - n - 2}\, \mathfrak{F}_\nu(x)\, \mathrm{r}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Diese Rekursionsformel ist von derselben Gestalt wie die in § 7 aufgestellte Formel, welche $F_{\nu+1}(x)$ durch $F_\nu(x)$ ausdrückt. Daher lassen sich aus der jetzigen Formel dieselben Schlüsse wie früher ziehen. Man übersieht hiernach, daß die Sätze, welche in §§ 6—9 vermittels der Methode der sukzessiven Annäherungen gewonnen worden sind, auch mit Benutzung der *Dini*schen Integrationsmethode hergeleitet werden können.

In seiner zweiten Arbeit (Annali di Matematica, 3. Serie, Bd. 3) beschäftigt sich Herr *Dini* mit dem Verhalten der Integrale linearer Differentialgleichungen für große reelle positive Werte von x, ohne, wie wir es hier tun, die Koeffizienten der Differentialgleichung als Potenzreihen vorauszusetzen. Wollen wir den von *Dini* a. a. O. S. 136 ausgesprochenen Satz auf eine Differentialgleichung von der Form (B) anwenden, so müssen wir diese den einschränkenden Bedingungen $k=0$ und $a_1' = \cdots = a_m' = 0$ unterwerfen. · Die letzte Bedingung hat zur Folge, daß $\varrho_1 = \cdots = \varrho_m = 0$ wird. (Der a. a. O. S. 144—145 ausgesprochene Satz bezieht sich auf eine der letzten Bedingung nicht unterworfene Differentialgleichung zweiter Ordnung.) *Dini* beschränkt sich auf diejenigen partikulären Integrale y_λ, bei welchen die bisher mit $\xi_1, \ldots \xi_m$ bezeichneten Integrationsgrenzen sämtlich gleich ∞ angenommen werden können; dazu ist erforderlich, daß keine der Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ einen kleineren reellen Teil besitzt als α_λ. Das Verhalten des allgemeinen Integrals für positive Werte von x ergibt sich also nur dann, wenn sämtliche Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ denselben reellen Teil besitzen. Bei *Dini* wird $z_i = e^{-a_i x}$ angenommen; dasselbe erreichen wir, wenn wir, unsere Zahl n gleich 1 annehmend, $\varphi_i = e^{a_i x}$ setzen. — Es sei noch bemerkt, daß *Dini* seine Methode auch auf den Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung ausdehnt.

§ 12.

Herr *Ford* hat (Annali di Matematica, Serie 3, Bd. 13) die *Dini*sche Methode der Integration linearer Differentialgleichungen auf lineare Differen-

zengleichungen übertragen und über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen für große Werte von x Sätze aufgestellt, welche *Dini*s Sätzen über Differentialgleichungen entsprechen. Die *Ford*schen Sätze sind auf unsere Differenzengleichung (A_1) nur dann anwendbar, wenn $a_1' = 0, \ldots a_m' = 0$, also $\varrho_1 = 0, \ldots \varrho_m = 0$ ist. Es werden nur diejenigen Fälle betrachtet, in welchen $\xi_1 = \cdots = \xi_m = \infty$ gesetzt werden kann. Das Verhalten des Integrals y_λ für große Werte von x ergibt sich demgemäß nur dann, wenn keine der Größen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als α_λ.

In einer soeben im 10. Bd. der Transactions of the American Mathematical Society erschienenen Arbeit behandelt Herr *Ford* nur lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung. Bei der Anwendung seiner jetzigen Methode auf unsere Differenzengleichung (A_1) für $m = 2$ ist die Annahme $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ nicht mehr erforderlich, weil er durch geeignete Wahl von z_i das erreicht, was wir mit $\varphi_i = \alpha_i^x x^{\varrho_i}$ erreichen würden. Im Falle $|\alpha_1| > |\alpha_2|$ erhält er zunächst unser Integral y_2, wobei $\xi_1 = \xi_2 = \infty$ gesetzt wird; das Integral y_1 findet er sodann, indem er das allgemeine Integral der Differenzengleichung zweiter Ordnung unter Benutzung eines bekannten partikulären Integrals durch Summation darstellt. Im Falle $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, in welchem sich die beiden Integrale zusammen ergeben, bleibt noch eine einschränkende Voraussetzung bestehen.

Die Note von Herrn *Galbrun* (Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 5. April 1909) behandelt die asymptotische Darstellung sämtlicher Lösungen einer linearen Differenzengleichung m-ter Ordnung durch divergente Reihen; sie beschränkt sich, da sie die *Laplace*sche Transformation benutzt, auf eine Differenzengleichung

$$P_0 y(x+m) + P_1 y(x+m-1) + \cdots + P_{m-1} y(x+1) + P_m y(x) = 0,$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen p-ten Grades von x sind:

$$P_i = a_i x^p + \cdots; \qquad (i=1, \ldots m)$$

die Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ der Gleichung

$$a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

werden voneinander und von Null verschieden vorausgesetzt.

Es sei bemerkt, daß die allgemeinere Differenzengleichung, in welcher P_i $(i=0, 1, \ldots m)$ eine ganze Funktion $(p \pm ik)$-ten Grades von x ist, nach § 5 durch die Substitution

$$y(x) = (\Gamma(x+1))^{\pm k} y'(x)$$

in eine Differenzengleichung übergeht, auf welche sich unter gewissen Voraussetzungen die Methode von *Galbrun* anwenden läßt.

In §§ 3—4 der Arbeit von Herrn *Perron* (Math. Annalen, Bd. 66) kommen Differenzengleichungen mit verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung vor; unter gewissen Voraussetzungen über das Verhalten der Koeffizienten der Differenzengleichung für große x wird ein Satz über das Verhalten des allgemeinen Integrals und gewisser Partikulärintegrale für große x bewiesen.

Die in §§ 1—5 der hier vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie wäre noch auf diejenigen Fälle auszudehnen, in welchen mehrfache, sowie verschwindende Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Differenzengleichung (A) vorkommen. Es wäre die Form der die Differenzengleichung befriedigenden Reihen und die asymptotische Darstellung der Integrale auch in diesen Fällen zu untersuchen.

Hier sei nur ein hierher gehöriger Satz ohne Beweis angegeben.

In der Differenzengleichung (A) sei in der Bezeichnung von § 5 $a_m = a'_m = \cdots = a_m^{(\varkappa-1)} = 0$, $a_m^{(\varkappa)} \neq 0$; die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha = 0$$

habe neben der Wurzel $\alpha_m = 0$ $m-1$ voneinander und von Null verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$. Dann besitzt die Gleichung (A) außer $m-1$ Integralen $y_1, \ldots y_{m-1}$ von derselben Form wie in § 5 ein Integral y_m, für welches eine asymptotische Gleichung

$$y_m \backsim (\Gamma(x+1))^{k-\varkappa} \bar{\alpha}^x x^{\bar{\varrho}} \Big(1 + \frac{\bar{A}_1}{x} + \frac{\bar{A}_2}{x^2} + \cdots\Big)$$

gilt, wo

$$\bar{\alpha} = -\frac{a_m^{(\varkappa)}}{a_{m-1}}$$

ist*).

---

*) Zu den in der Einleitung angeführten und zum Teil in § 12 besprochenen Arbeiten über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen für große Werte der Veränderlichen sind seit Vollendung der vorliegenden Arbeit die folgenden hinzugekommen: *Perron*, Über die *Poincaré*sche lineare Differenzengleichung (Dieses Journal, Bd. 137). — *Galbrun*, Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies linéaire pour les grandes valeurs de la variable (Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris, 6. Dezember 1909, 24. Januar 1910).

Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.

Erster Teil:

Das allgemeine Uniformisierungsprinzip.

Von Herrn *Paul Koebe* in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 1. Allgemeiner Begriff der zu einer analytischen Kurve gehörenden uniformisierenden Variablen. Aufstellung des allgemeinen Uniformisierungsprinzips 197

§ 2. Das Analysis-situs-Problem der Uniformisierungstheorie 201

§§ 3—14. *Das Abbildungsproblem der Uniformisierungstheorie* 207

§ 3. Allgemeine Begriffsbestimmungen über unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche. Übersicht über die Entwicklungen der folgenden Paragraphen §§ 4—11 und § 13 . 207

§ 4. Lösung einer speziellen Randwertaufgabe der Potentialtheorie nach *Schwarz-Neumann*schen Prinzipien 211

§ 5. Die Funktion u_n und ihre charakteristische *Hilbert*sche Minimaleigenschaft 216

§ 6. Existenz der Funktion $\lim_{n=\infty} u_n = u$ 220

§ 7. Der Wert des *Dirichlet*schen Integrales und die charakteristische *Hilbert*sche Minimaleigenschaft der Funktion u 224

§ 8. Einige in der Folge zu benutzende weitere Eigenschaften der Funktion u 226

§ 9. Übergang zur Funktion U durch gürtelförmige Verschmelzung 227

§ 10. Die *Hilbert*sche charakteristische Minimaleigenschaft der Funktion U 229

§ 11. Die Funktion U als Grenze der Näherungsfunktionen U_n 230

§ 12. Die verschiedenen Methoden zum Beweise der Existenz der Funktion U (*Referat* und Ergänzungen) 232

§ 13. Konforme Abbildung des Bereichs B durch die Funktion $U+iV$ auf einen schlichten Schlitzbereich. Die Inhaltsbedingung 236

§ 14. Andere Methoden zum Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes für schlichtartige Bereiche, insbesondere für einfach zusammenhängende Bereiche. (*Referat.*) 242

§ 15. Nähere Betrachtung zweier Beispiele: Das Fundamentaltheorem von der Uniformisierung algebraischer Kurven durch automorphe Funktionen des *Schottky*schen Typus. Konforme Abbildung eines $(p+1)$-fach zusammenhängenden schlichten Bereichs auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich 246

Einleitung.

Ist $y(x)$ eine beliebige analytische Funktion, so heiße t eine zu derselben gehörende uniformisierende Variable, wenn die zu ihrer Erklärung dienende analytische Funktion $t(x, y)$ eine einwertige Funktion ist, d. i. eine Funktion, die keinen Wert mehr als *einmal* annimmt. Es sind dann $x(t)$ und $y(t)$ simultan eindeutige analytische Funktionen. Zu der Funktion $t(x, y)$ gehört eine *Riemann*sche Fläche Φ, welche man sich zweckmäßig über der *Riemann*schen Fläche F als *Überlagerungsfläche* ausgebreitet denkt. Die Fläche Φ wird durch Vermittelung der Funktion $t(x, y)$ umkehrbar eindeutig und konform auf einen *schlichten*, d. i. einblättrigen Bereich T abgebildet, nämlich das *Wertegebiet* der Variablen t. Das Uniformisierungsproblem führt so auf die Aufgabe, eine beliebige *schlichtartige Riemann*sche Fläche, d. i. eine Fläche, welche durch jeden inneren Rückkehrschnitt in getrennte Stücke zerfällt*), umkehrbar eindeutig und konform auf einen *schlichten* Bereich abzubilden.

Um diese Aufgabe zu lösen, konstruieren wir überhaupt auf der allgemeinsten *Riemann*schen Fläche B, die auch *nicht schlichtartig* sein kann, diejenige Potentialfunktion U, welche in der Interpretation von Herrn *Klein* den Spannungszustand eines aus einer auf B in einem Punkte O aufgesetzten Doppelquelle entspringenden *stationären elektrischen Stromes* darstellt, eine Funktion, welche nach Herrn *Hilbert* mathematisch durch eine fundamentale *Minimaleigenschaft* in Verbindung mit der in O bestehenden Unstetigkeit vollständig charakterisiert ist und unabhängig von der Minimaleigenschaft einem von mir bereits früher in Betracht gezogenen (nicht publizierten) Ansatze gemäß als Grenze $U = \lim_{n=\infty} U_n$ von Potentialen U_n für Näherungsbereiche B_n unter Einführung der Bedingung „*normale Ableitung gleich Null*“ als Randbedingung aufzufassen ist.

Ist V die zu U konjugierte Potentialfunktion, so vermittelt die Funktion $U + iV$ im Falle der *Schlichtartigkeit* der Fläche B eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen *schlichten* Bereich, dessen Begrenzungslinien lauter *zur Achse des Reellen parallele geradlinige Strecken* sind, von denen einzelne sich auch auf einen Punkt reduzieren

*) Eine schlichtartige Fläche läßt sich also unmittelbar *stetig* (d. i. noch nicht konform) umkehrbar eindeutig auf einen schlichten Bereich abbilden.

können*). Die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit dieses *Schlitzbereichs* hat den *Inhalt Null,* d. h. sie läßt sich in endlich viele geschlossene Kurven von beliebig kleinem Gesamtflächeninhalt einschließen. Die letztere Tatsache ist darum in hohem Grade bemerkenswert, weil zufolge dieser Tatsache z. B. jeder einblättrige unendlich-vielfach zusammenhängende Bereich, der etwa nur von diskreten Punkten begrenzt wird, welche die Mächtigkeit des Kontinuums und einen *von Null verschiedenen Inhalt* haben**), umkehrbar eindeutig und konform auf einen anderen schlichten Bereich abgebildet werden kann, dessen Begrenzungsmannigfaltigkeit tatsächlich den *Inhalt Null* hat***).

Es ist von besonderem Interesse, daß die erwähnte Abbildungseigenschaft der Funktion $U+iV$ als eine *„unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft"* demonstriert werden kann.

Was den Existenzbeweis der Funktion U anbetrifft, so stütze ich mich wesentlich auf die *Schwarz-Neumann*schen kombinatorischen Methoden, vermöge deren wir uns fast unmittelbar in den Besitz der erwähnten Näherungsfunktionen U_n setzen können.

Wesentlich anders gestaltet sich eine von Herrn *Hilbert* gefundene Methode des Existenzbeweises; *Hilbert* stützt sich dabei auf die von ihm in seiner Abhandlung „Über das *Dirichlet*sche Prinzip" entwickelten Methoden. —

Unter den zu einer gegebenen analytischen Kurve (x,y) gehörenden Uniformisierungstranszendenten $t(x,y)$ sind diejenigen besonders ausgezeichnet, für welche die zugehörende Überlagerungsfläche Φ keine relativen Windungspunkte (Windungspunkte relativ zu F) besitzt und *einfach zusammenhängend* ist. Die Variable t ist in diesem Falle wesentlich durch die Eigenschaft charakterisiert, daß nicht nur x und y, sondern überhaupt jede relativ zum Gebilde (x,y) unverzweigte Funktion $\tau(x,y)$ eine eindeutige Funktion von t ist. Wird das Wertegebiet T dieser Variablen als Kreis normiert, so erhält man in den Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ *eindeutige automorphe Funktionen,* welche bei einer gewissen Gruppe linearer Substitutionen ungeändert bleiben. Das hiermit bezeichnete Uniformisierungs-

---

*) Es handelt sich also um die Übertragung eines für *endlich*-vielfach zusammenhängende *schlichte* Bereiche von *Schottky* gefundenen Abbildungssatzes.

**) Derartige Bereiche lassen sich bekanntlich leicht bilden.

***) Für endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche ist dieser Satz trivial.

theorem war in der Tat das erste auf beliebige analytische Kurven sich beziehende Uniformisierungstheorem, dem die Bemühungen der Forscher galten. Dieses Theorem wurde zum ersten Male 1907 durch Herrn *Poincaré* und den Verfasser nach verschiedenen Methoden bewiesen*).

*) *Literatur:* Ich erwähne in der folgenden Zusammenstellung nur diejenige Literatur, welche im engeren Sinne auf die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven Bezug hat bzw. als unmittelbare Voraussetzung derselben in Betracht kommt.

H. A. Schwarz: „Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen." Monatsberichte der Kgl. Akad. d. Wiss., Berlin, 1870. = Ges. Abhandlungen Bd. II, S. 144.

C. Neumann: Abh. d. Kgl. sächs. Ges. d. Wiss., 1870, bzw.: „Vorlesungen über *Riemanns* Theorie der *Abel*schen Integrale." Leipzig (Teubner) 2. Auflage, 1884.

H. Poincaré: „Sur un théorème de la théorie générale des fonctions." Bull. de la soc. math. de France, t. XI, 1883.

Harnack: „Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktionen in der Ebene." Leipzig (Teubner) 1887.

D. Hilbert: „Mathematische Probleme." Pariser Vortrag, Problem 22 „Uniformisierung analytischer Beziehungen durch automorphe Funktionen." Abgedruckt in Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. (zitiert als „Gött. Nachr.") 1900, S. 253 ff. sowie Archiv der Math. u. Phys. III, 1, S. 44.

Derselbe: „Über das *Dirichlet*sche Prinzip." Festschrift zur Feier des 150-jährigen Best. der Kgl. Ges. d. Wiss., Göttingen, 1901 = Math. Ann., Bd. 59, S. 161 ff.

Osgood (1900), *Brodén* (1905), *Johansson* (1905—1906). Vgl. die Literaturangaben in Math. Ann. Bd. 67, S. 148.

P. Koebe (zitiert als *K.*)*:* Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven." Gött. Nachr., 12. Mai 1907.

Poincaré: „Sur l'uniformisation des fonctions analytiques." Acta math. Bd. 31. Erschienen November, gedruckt März 1907.

K.: „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (Zweite Mitteilung.)" Gött. Nachr., 23. November 1907.

Poincaré: „Sur l'avenir des mathématiques." Atti del IV congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) = Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, T. 26 (1908).

K.: „Über ein allgemeines Uniformisierungsprinzip." Atti del IV congr. intern. dei matem. (Roma 1908). Vol. II, S. 25. — „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (Dritte Mitteilung)." Gött. Nachr., 11. Juli 1908. — „Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets." Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences, Paris, 1. juin 1909. — „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I." Math. Ann. Bd. 67, 1909, insbesondere Abschnitt E, III.

Hilbert: „Zur Theorie der konformen Abbildung." Gött. Nachr., 17. Juli 1909.

K.: „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Vierte Mitteilung." Gött. Nachr., 31. Juli 1909. — „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode." Gött. Nachr., 26. Febr. 1910.

(*verte!*)

Für reelle analytische Kurven haben neben den soeben erwähnten Uniformisierungstranszendenten diejenigen Uniformisierungstranszendenten eine spezifische Bedeutung, bei welchen die Überlagerungsfläche Φ in zwei zu einander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerfällt. Während erstere die Bedingung für die Möglichkeit biuniformer (bei algebraischen Kurven birationaler) Verwandtschaft analytischer Kurven überhaupt liefern, liefern letztere die analoge Bedingung für reelle biuniforme (birationale) Verwandtschaft reeller Kurven.

Die Idee der Uniformisierung entwickelte sich historisch im unmittelbaren Zusammenhange mit der Fortbildung des *Riemann*schen Ideeenkreises, insbesondere in der Theorie der automorphen Funktionen*). Andererseits ist hervorzuheben, daß die Fragestellung des allgemeinen Uniformisierungsproblems sich vom Standpunkte der *Weierstraß*schen Funktionentheorie bereits am Eingange als ein allgemeines Grundproblem der Funktionentheorie darbietet. In der Tat benutzt *Weierstraß*, um eine beliebige analytische Funktion in ihrer ganzen Ausdehnung zu definieren, unendlich viele Hülfsveränderliche $t_1, t_2, t_3, \ldots$, von denen jede einzelne t_a ihm dazu dient, mittels zweier geeigneter *eindeutiger* Potenzreihen $x = \mathfrak{P}_a^{(1)}(t_a)$, $y = \mathfrak{P}_a^{(2)}(t_a)$ die Umgebung eines *inneren* Punktes des vollständigen monogenen Gebildes darzustellen oder, wie wir sagen können, zu *uniformisieren*. Die Frage, ob es möglich ist, das ganze Gebilde (x, y) mit einem Schlage durch zwei eindeutige analytische Ausdrücke in *einer* Variablen t darzustellen, bezeichnet wesentlich unser allgemeines Uniformisierungsproblem.

Das Uniformisierungsproblem erscheint so als eine Verbindung *Weierstraß*scher und *Riemann*scher Auffassung der Funktionentheorie. Die Klärung und Lösung dieses Problems auch für Funktionen mehrerer Variablen mag einer weiteren Entwicklung der Theorie der analytischen Funktionen als Ziel vorschweben**).

R. Courant: „Über die Anwendung des *Dirichlet*schen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung." Dissertation, Göttingen 1910. — „Zur Begründung des *Dirichlet*schen Prinzipes." Gött. Nachr. 28. Mai 1910.

S. Johansson: „Über einige neuere Fragen aus der Theorie der konformen Abbildung." „Zur Theorie der Uniformisierung *Riemann*scher Flächen." Acta soc. scient. Fennicae, T. 40, Nr. 1 und 2 (1910).

*) *Schwarz*, *Hermite*, *Schottky*, *Fuchs*, *Klein*, *Poincaré*. 1872—1884.

**) *Hilbert*, Pariser Vortrag, a. a. O.; *Poincaré*, Römischer Vortrag, a. a. O.

§ 1. *Allgemeiner Begriff der zu einer analytischen Kurve gehörenden uniformisierenden Variablen. Aufstellung des allgemeinen Uniformisierungsprinzips.*

Es sei $y(x)$ eine beliebig gegebene analytische Funktion der komplexen Variablen x. Wir sprechen auch von der analytischen Kurve (x, y) oder dem analytischen Gebilde (x, y), um damit auszudrücken, daß im folgenden die beiden Variablen x und y eine wesentlich gleichberechtigte Rolle spielen werden. Als innere Punkte des Gebildes (x, y) bezeichnen wir diejenigen Stellen desselben, an welchen die Funktion $y(x)$ den Charakter einer algebraischen Funktion von x besitzt. Zu der Funktion $y(x)$ gehört eine bestimmte *Riemann*sche Fläche F, welche über der x-Ebene ausgebreitet ist. Diese *Riemann*sche Fläche repräsentiert in ihrer Ausdehnung und Vielblättrigkeit in umkehrbar eindeutiger Weise die Gesamtheit aller derjenigen Stellen der Funktion $y(x)$, an welchen diese Funktion den Charakter einer algebraischen Funktion besitzt. Die Fläche F besteht somit für unsere Auffassung nur aus *inneren* Punkten. Als innere Punkte können dabei Windungspunkte endlicher Ordnung in unendlich großer Zahl vorkommen. Hingegen sind Windungspunkte unendlich hoher Ordnung als Grenzpunkte der Fläche F anzusehen.

Eine als Funktion des Ortes auf der Fläche F erklärte analytische Funktion f werden wir zweckmäßig, statt mit $f(x)$, mit $f(x, y)$ bezeichnen. In allgemeinster Weise können wir dann den Begriff der zu der analytischen Kurve (x, y) gehörenden uniformisierenden Variablen t folgendermaßen definieren.

Definition: Eine Größe t heißt eine zu der Kurve (x, y) bzw. zu der Funktion $y(x)$ oder Riemannschen Fläche F gehörende uniformisierende Variable, wenn $t(x, y)$ eine solche Funktion des Ortes auf der Fläche F ist, welche niemals an zwei verschiedenen Stellen der Fläche F, mithin auch nicht an einer und derselben Stelle der Fläche F in zwei verschiedenen relativen Zweigen, einen und denselben Wert annimmt. Die Funktion $t(x, y)$ wird dabei im allgemeinen relativ zu F unendlich-vieldeutig sein.

Offenbar sind die in vorstehender Definition angegebenen Bedingungen gleichbedeutend mit der Forderung, daß $x(t)$ und $y(t)$ simultan eindeutige Funktionen der Variablen t sein sollen in demjenigen Bereiche T der Variablen t, welcher definiert ist als der Bereich der von der Funktion $t(x, y)$ angenommenen Werte. Zweckmäßigerweise werden wir

den Begriff der uniformisierenden Variablen noch in gewisser Weise verengern. Zunächst bietet sich die Unterscheidung zwischen den relativ unverzweigten und den relativ verzweigten uniformisierenden Variablen dar.

Definition: Eine uniformisierende Variable t heißt relativ verzweigt oder unverzweigt, je nachdem die zu ihrer Erklärung dienende analytische Funktion $t(x, y)$ relativ zu F verzweigt oder unverzweigt ist.

Ist t eine relativ unverzweigte uniformisierende Variable, so verlangen wir jetzt von der Funktion $t(x, y)$ noch, daß sie im ganzen Innern der Fläche F und zwar in allen ihren relativen Zweigen den Charakter einer rationalen Funktion von x, y hat. Ist hingegen $t(x, y)$ verzweigt, so beschränken wir uns zweckmäßig darauf, solche uniformisierenden Variablen in Betracht zu ziehen, für welche die relativen Verzweigungsstellen, wenn man sie sich auf F markiert denkt, eine solche Punktmenge M bilden, welche im Innern von F keinen Häufungspunkt besitzt. Letztere Forderung ist gleichbedeutend mit folgender Forderung: Es sollen in jedem durch wohldefinierte geschlossene Linien abgegrenzten Teilbereiche von F, dessen Begrenzungslinien ebenfalls im Innern von F verlaufen, nur endlich viele relative Verzweigungspunkte liegen, bei Berücksichtigung aller überhaupt vorhandenen, also im allgemeinen unendlich vieler Zweige der Funktion $t(x, y)$. Abgesehen von den Punkten der Menge M, in welchen zugelassen wird, daß die Funktion $t(x, y)$ sich in ihren verschiedenen Zweigen von beliebig hoher endlicher oder von unendlich hoher Ordnung verzweigt, verlangen wir nun von der Funktion $t(x, y)$, daß sie an allen anderen Punkten der Fläche F in allen ihren relativen Zweigen den Charakter einer rationalen Funktion von x und y besitzt. Aus der Einwertigkeit der Funktion $t(x, y)$ folgern wir sofort, daß diese Funktion in allen denjenigen relativen Verzweigungspunkten, in welchen sie sich von endlich hoher Ordnung verzweigt, den Charakter einer algebraischen Funktion von x besitzt. Aus der Einwertigkeit der Funktion $t(x, y)$ ergibt sich auch die Bemerkung, daß diese Funktion in ihrer ganzen Ausdehnung auf F höchstens an *einer* Stelle bestimmt unendlich wird und in dieser Stelle dann genau von der ersten Ordnung.

Betrachten wir jetzt die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Wir haben bereits oben erwähnt, daß dieselben in dem Wertbereich T simultan eindeutige Funktionen von t sind. Man erkennt auch leicht, daß der Bereich

T im Sinne der analytischen Fortsetzung überhaupt der vollständige simultane Existenzbereich der Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ ist, insbesondere dann, wenn die von uns oben angegebenen Beschränkungen des Begriffs der uniformisierenden Variablen zugrunde gelegt werden; d. h. es ist nicht möglich, beide Funktionen simultan über den Bereich T hinaus analytisch fortzusetzen. Sind $t_1(x, y)$ und $t_2(x, y)$ zwei verschiedene relative Zweige der Funktion $t(x, y)$, so vermittelt die Funktion $t_2(t_1)$ eine Transformation des Gebietes T in sich. Diese Transformation wird im allgemeinen nicht eine umkehrbar eindeutige Gebietstransformation sein. Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ bleiben bei der genannten analytischen Transformation ungeändert.

Ein besonders wichtiger Fall, der uns später allein näher interessieren wird, tritt ein, wenn die Substitution $t_2 = t_2(t_1)$, wie auch die relativen Zweige t_1 und t_2 gewählt sind, *stets eine umkehrbar eindeutige Transformation des Gebietes T in sich* darstellt. An der Funktion $t(x, y)$ kann dieser Fall folgendermaßen charakterisiert werden. Gehen wir aus von einem Zweige t_1 der Funktion $t(x, y)$, so wird es gewisse auf F geschlossene Wege geben, auf welchen sich die Funktion $t(x, y)$ reproduziert. Der Fall der umkehrbar eindeutigen Gebietstransformationen tritt dann und nur dann ein, wenn die Gesamtheit der soeben definierten Wege von der besonderen Wahl des Ausgangszweiges t_1 nicht abhängt. Die Funktion $t(x, y)$ heiße dann *relativ regulär-vieldeutig.* Wir betrachten nun alle in einem festen Punkte P auf F beginnenden geschlossenen Wege, indem wir zwei solche Wege als nicht verschieden gelten lassen, wenn sie durch stetige Deformation auf F in einander übergeführt werden können. Diese Gesamtheit von Wegen bildet eine Gruppe $\mathfrak{G}$, insofern als man je zwei derselben zu einem einzigen geschlossenen Wege zusammensetzen kann, dadurch daß man sich die betreffenden beiden Wege nacheinander durchlaufen denkt. Ist nun $t(x, y)$ relativ regulär-vieldeutig, so erhält man, wenn W irgendeinen speziellen der erwähnten geschlossenen Wege bezeichnet, ferner $\mathfrak{G}_1$ die Untergruppe derjenigen Wege bezeichnet, auf welchen sich $t(x, y)$ reproduziert, den Satz, daß $\mathfrak{G}_1$ *eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe* $\mathfrak{G}$ ist; denn durch W wird $t_1(x, y)$ entweder in sich selbst übergeführt oder in einen anderen Zweig t_2. Der Zweig t_2 reproduziert sich dann auf den Wegen der Gruppe

$W^{-1}\mathfrak{G}_1 W$*) und nur auf diesen Wegen. Nun sollte bei einer relativ regulär-vieldeutigen Funktion die Gruppe der Wege, auf welchen sich die Funktion $t(x, y)$ reproduziert, von der Wahl des Ausgangszweiges unabhängig sein, daher erhalten wir $W^{-1}\mathfrak{G}_1 W = \mathfrak{G}_1$. Es gilt offenbar auch die Umkehrung unseres Satzes, nämlich der Satz, daß eine uniformisierende Variable $t \equiv t(x, y)$, wenn die durch einen Zweig t_1 in der angegebenen Weise bestimmte Gruppe $\mathfrak{G}_1$ eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, die Eigenschaft hat, den verschiedenen relativen Zweigen der Funktion entsprechend lauter umkehrbar eindeutige Transformationen des Wertegebietes T in sich zu liefern.

Fassen wir nunmehr wieder den allgemeinen Begriff der zu einer analytischen Kurve (x, y) bzw. der *Riemann*schen Fläche F gehörenden uniformisierenden Variablen ins Auge. Zu der Funktion $t(x, y)$ gehört eine bestimmte *Riemann*sche Fläche Φ, welche die relative Vieldeutigkeit der Funktion $t(x, y)$ ebenso veranschaulicht, wie F die Vieldeutigkeit der Funktion $y(x)$. Die Fläche Φ stellen wir uns jedoch zum Unterschiede von der Fläche F, welche wir relativ über der gewöhnlichen x-Ebene ausgebreitet denken, als eine relativ über F ausgebreitete Fläche vor oder, wie wir auch sagen werden, als eine der Fläche F übergelagerte Fläche oder *Überlagerungsfläche* der Fläche F. Auf der Fläche Φ ist die Funktion $t(x, y)$ eine nicht nur jeden Wert höchstens einmal annehmende Funktion, was sie bereits auf F, ja sogar relativ zur gewöhnlichen x-Ebene ist, sondern auch eine *eindeutige* Funktion, und wir erkennen unmittelbar aus diesen beiden Tatsachen, daß durch Vermittelung der Funktion $t(x, y)$ die Fläche Φ umkehrbar eindeutig und konform auf das Wertegebiet T der Variablen t abgebildet wird, welches seinerseits als ein schlichter, d. i. einblättriger Bereich vorzustellen ist. Nun hat jeder schlichte Bereich, gleichgiltig ob derselbe endlichen oder unendlich hohen Zusammenhang hat, die Eigenschaft, durch jeden geschlossenen ganz im Innern verlaufenden Rückkehrschnitt in zwei getrennte Stücke zu zerfallen. Diese Eigenschaft, welche durchaus dem Gebiete der Analysis situs angehört, überträgt sich wegen der umkehrbar eindeutigen Beziehung der Fläche T auf die Fläche Φ auf letztere Fläche. Die Fläche Φ ist, wie wir uns ausdrücken wollen,

*) Mit W^{-1} wird der im umgekehrten Sinne durchlaufen zu denkende Weg W bezeichnet.

eine *schlichtartige Riemann*sche Fläche, d. i. also, um es nochmals zu sagen, eine solche endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängende, endlich- oder unendlich-vielblättrige *Riemann*sche Fläche, welche durch jeden auf ihr gezogenen geschlossenen Rückkehrschnitt in zwei getrennte Stücke zerfällt.

Auf diese Weise erkennen wir, daß das Problem der Uniformisierung der analytischen Kurve (x, y) bzw. der Funktion $y(x)$ oder *Riemann*schen Fläche F in zwei Probleme zerlegt werden kann, ein Problem der Analysis situs und ein Problem der konformen Abbildung:

Das Analysis-situs-Problem der Uniformisierungstheorie: Es sollen die zu F gehörenden schlichtartigen Überlagerungsflächen Φ gefunden werden.

*Das Abbildungsproblem der Uniformisierungstheorie: Es soll der Nachweis geführt werden, daß eine schlichtartige Riemann*sche *Fläche stets umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich abgebildet werden kann.*

Insofern durch das erste Problem nicht mehr und nicht weniger zum Ausdruck gebracht wird als die vom topologischen Standpunkte unerläßliche Bedingung, der irgendeine Uniformisierungstranszendente $t(x, y)$ genügen muß, können wir unter der Voraussetzung, daß das zweite Problem vollständig erledigt ist, was unten geschehen wird, folgendes allgemeine Prinzip aussprechen.

Das allgemeine Uniformisierungsprinzip): Jede topologisch mögliche Uniformisierung einer analytischen Kurve (x, y) kann auch funktionentheoretisch verwirklicht werden.*

§ 2. *Das Analysis-situs-Problem der Uniformisierungstheorie.*

Die Aufgabe, alle schlichtartigen Überlagerungsflächen der gegebenen *Riemann*schen Fläche F zu konstruieren, hat in dieser Allgemeinheit kein besonderes Interesse. Wir wollen hier zunächst einige Beispiele schlichtartiger Überlagerungsflächen betrachten, Beispiele, bei welchen die gegebene Fläche F selbst keiner Beschränkung unterworfen wird. Später, im zweiten

---

*) Vgl. meinen Römischen Vortrag 1908. Zum ersten Male bewiesen habe ich das Prinzip bzw. das genannte Abbildungstheorem in meiner „dritten Mitteilung" 1908 a. a. O.

Teile dieser Abhandlung, werden wir auf die wichtigsten Überlagerungsflächen einzugehen haben, die zu der Grundfläche F gehören. Diese wichtigsten Überlagerungsflächen sind einfach zusammenhängend und von selbst relativ regulär.

Die schlichten Überlagerungsflächen Φ, welche wir jetzt betrachten wollen, sind, ebenso wie die im zweiten Teile betrachteten Überlagerungsflächen, *relativ regulär*, sodaß, wenn irgend zwei relativ zu F koinzidierende Punkte einer solchen Fläche betrachtet werden, die verschiedenen relativen Blättern letzterer Fläche angehören, diese Koinzidenzbeziehung sich als eine umkehrbar eindeutige Punkttransformation der Fläche Φ in sich darstellt.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel *einer relativ regulären Überlagerungsfläche Φ der Fläche F, bei welcher die Fläche Φ keine relativen Windungspunkte besitzt*, darauf ein Beispiel, in welchem die betreffende *Fläche Φ' ebenfalls relativ regulär ist und in vorgeschriebenen Punkten der Fläche F in allen ihren relativen Blättern* (Blättern der Fläche Φ') *Windungspunkte vorgeschriebener endlicher oder unendlich hoher Ordnung besitzt*, wobei die Ordnungszahl für jede einzelne der auf F gegebenen Windungsstellen besonders vorgeschrieben ist.

Um die Fläche Φ ohne relative Windungspunkte zu erhalten, denken wir uns die Fläche F als Grenze von endlich-vielblättrigen, endlich-vielfach zusammenhängenden Näherungsflächen mit wohldefinierten Begrenzungslinien dargestellt:

$$F = \lim_{n=\infty} F_n,$$

wobei $F_1 < F_2 < F_3 < \cdots$ sein soll. Die Fläche F_{n+1} enthält also jedesmal die Fläche F_n in ihrem Innern.

Ist die Fläche F bereits schlichtartig, so kann diese selbst als Fläche Φ genommen werden. Ist aber die Fläche F nicht schlichtartig, so können auch die Näherungsflächen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ nicht alle schlichtartig sein. Es wird vielmehr einmal die Ordnungszahl des Zusammenhanges der Fläche F_n größer werden als die Anzahl der Begrenzungslinien dieser Fläche.

Wir konstruieren nun auf F_1 soviel geschlossene, voneinander getrennte innere Rückkehrschnitte, daß vermöge dieser Rückkehrschnitte, die Fläche F_1 in eine schlichtartige Fläche F_1' verwandelt wird. Die An-

zahl dieser Rückkehrschnitte sei r_1. Darauf betrachten wir die Fläche F_2 und ziehen unter Beibehaltung der soeben gezogenen r_1 Rückkehrschnitte r_2 weitere, ganz außerhalb F_1 verlaufende Rückkehrschnitte, bis auch die Fläche F_2 in eine schlichtartige Fläche F_2' verwandelt ist. Die Fläche F_3 wird durch Hinzunahme von r_3 weiteren, ganz außerhalb F_2 verlaufenden Rückkehrschnitten in eine schlichtartige Fläche F_3' verwandelt usw. Das Verfahren setzen wir in infinitum fort und erkennen dabei unmittelbar, daß die Fläche F vermöge dieses Aufschneidungsprozesses in eine schlichtartige Fläche F' verwandelt wird, welche, allgemein zu reden, unendlich viele Paare geschlossener Begrenzungslinien aufweist, die ganz innerhalb F verlaufen. Die Fläche F' kann noch nicht als Überlagerungsfläche Φ benutzt werden, eben wegen der genannten *inneren**) Begrenzungslinien. Wir gelangen jedoch von der Fläche F aus durch folgenden einfachen Überlagerungsprozeß zu einer schlichtartigen Überlagerungsfläche Φ.

Wir stellen uns vor, daß wir die Fläche F' in unendlich vielen Exemplaren zur Verfügung haben. Wir gehen dann aus von einem Exemplare $F' \equiv \overset{(0)}{F'}$ und heften an jede der $2r_1 + 2r_2 + \cdots$ *inneren* Begrenzungslinien dieser Fläche je ein Neuexemplar F' an, so zwar, daß wir immer gegenüberliegende Ufer zusammenheften. Nach diesem ersten Heftungsprozeß sind sämtliche innere Begrenzungslinien der Ausgangsfläche $\overset{(0)}{F'}$ verschwunden; statt dessen haben wir eine aus, allgemein zu reden, unendlich vielen Exemplaren F' gebildete neue Fläche $\overset{(1)}{F'}$ erhalten, welche ihrerseits unendlich viele Begrenzungslinien besitzt, von denen jede einzelne ebenfalls relativ zu F mit einem der auf F gezogenen Rückkehrschnitte koinzidiert. Jeder einzelne der Rückkehrschnitte wird in diesem Sinne durch unendlich viele verschiedene Begrenzungslinien von $\overset{(1)}{F'}$ vertreten sein. Aus $\overset{(1)}{F'}$ bilden wir nun eine Fläche $\overset{(2)}{F'}$, indem wir an jede innere Begrenzungslinie der ersteren Fläche wiederum je ein Neuexemplar F' anheften. Ebenso finden wir aus $\overset{(2)}{F'}$ eine Fläche $\overset{(3)}{F'}$ usw. Die Fläche

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F'}$$

ist dann unsere gesuchte Fläche Φ. Diese Fläche ist schlichtartig, weil

---

*) d. i. relativ zu F innerhalb F verlaufenden. Auch im folgenden werden wir uns der Bezeichnung „*innere Begrenzungslinien*“ in diesem Sinne bedienen.

jede Näherungsfläche $\overset{(n)}{F'}$ schlichtartig ist; auch ist unmittelbar einzusehen, daß die Fläche Φ relativ regulär ist. Es geht nämlich in den Bau der Fläche Φ jedes benutzte Exemplar F' offenbar gleichberechtigt ein, sodaß man die Fläche Φ auch, ausgehend von jedem benutzten Exemplar F' nach demselben Zusammenheftungsgesetze wieder gewinnen würde.

Es ist wichtig, die Fläche Φ als Grenze endlich-vielfach zusammenhängender, endlich-vielblättriger Näherungsflächen mit wohldefinierten Begrenzungslinien darzustellen. Die Näherungsflächen $\overset{(n)}{F'}$ genügen dieser Bedingung nicht. Um der gestellten Forderung zu genügen, knüpfen wir an die Flächen $F_1' < F_2' < F_3' < \cdots$ an. Die Fläche F_n' besitzt außer den Begrenzungslinien von F_n $2r_1 + \cdots + 2r_n$ Rückkehrschnittbegrenzungslinien, welche den obigen $r_1 + \cdots + r_n$ Rückkehrschnitten entsprechen. Wir können nun ebenso, wie wir vorher aus F' die Fläche $\overset{(n)}{F'}$ bildeten, aus F_n' eine Fläche $\overset{(n)}{F_n'}$ bilden, wobei jetzt als Heftungslinien nur solche Begrenzungslinien in Betracht kommen, die mit den erwähnten Rückkehrschnitten koinzidieren. Die Fläche $\overset{(n)}{F_n'}$ ist endlich-vielblättrig, und es ist, da $\overset{(n)}{F_n'}$ offenbar ein Teilbereich des Bereichs $\overset{(n)}{F'}$ ist,

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F_n'}.$$

Anmerkung: Anstatt die Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ nach getrennten Rückkehrschnitten aufzuschneiden, kann man dieselben auch, wie dies in der Theorie der *Abel*schen Integrale üblich ist, nach Rückkehrschnittpaaren mit je einem Kreuzungspunkte aufschneiden. Ferner kann man, nachdem die Aufschneidung längs Rückkehrschnittpaaren erfolgt ist, beispielsweise die Kreuzungspunkte der jeweilig hinzukommenden $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Rückkehrschnittpaare nach je einem Punkte zusammenziehen, sodaß die betreffenden $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Paare sich je zu einer kanonischen Zerschneidung vereinigen. Auch die in solcher Weise aufgeschnittene Fläche F, welche ebenfalls schlichtartig ist, läßt sich als Grundexemplar zur Bildung einer schlichtartigen relativ regulären Überlagerungsfläche ohne relative Windungspunkte verwenden nach Analogie des *Klein*schen Kompositionsprinzips*).

*) *Klein*, Neue Beiträge zur *Riemann*schen Funktionentheorie. Math. Ann. Bd. 21 (1882). Ich verweise auch auf meine Abhandlungen über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II, Math. Ann. Bd. 69, sowie III (noch nicht erschienen).

Ich will nunmehr auch ein Beispiel einer schlichtartigen, relativ regulären Überlagerungsfläche mit auf F vorgeschriebenen Windungspunkten vorgeschriebener Ordnung konstruieren.

Ich knüpfe zu dem Zwecke an die oben zugrunde gelegte Darstellung $F = \lim_{n=\infty} F_n$ der Fläche F an, mache jedoch jetzt bezüglich der Wahl der Näherungsflächen F_n eine einschränkende Bedingung. Diese Bedingung ist folgende: Es soll keine der Begrenzungslinien von F_n auf der Fläche F ein zusammenhängendes, außerhalb F_n liegendes *inneres* Stück der Fläche F vollständig abgrenzen. Um dies deutlicher zu verstehen, denke man sich etwa aus der Näherungsfläche F_n eine kleine Kreisscheibe ausgeschnitten, wobei F_n eine Begrenzungslinie mehr erhalten wird. Die Fläche F_n würde jedenfalls dann nicht mehr der gestellten Bedingung genügen, eben darum weil die erwähnte Kreislinie die genannte Kreisscheibe abgrenzt. Im allgemeinen Falle ist das betreffende abgegrenzte Flächenstück endlich-vielfach zusammenhängend zu denken.

Um eine Darstellung $F = \lim_{n=\infty} F_n$ zu erhalten, für welche bei allen Näherungsflächen F_n die erwähnte Bedingung erfüllt ist, können wir einfach folgendermaßen verfahren. Wir betrachten die Flächen $F_1, F_2, \ldots$ der Reihe nach. Sobald eine Näherungsfläche kommt, welche eine oder mehrere unerlaubte Begrenzungslinien besitzt, schließen wir diese Fläche über die erwähnten unerlaubten Linien hinweg ab, indem wir die durch diese Linien jedesmal begrenzten Flächenteile von F zu der betreffenden Näherungsfläche hinzunehmen. Dadurch entsteht eine neue Folge von Näherungsflächen, für welche wir die Bezeichnungen $F_1, F_2, \ldots$ beibehalten wollen. Die neuen Näherungsflächen genügen dann durchweg der oben gestellten speziellen Bedingung.

Nunmehr denken wir uns auf F irgendeine Punktmenge M markiert, für welche jedoch keiner der etwa vorhandenen Häufungspunkte mit einem inneren Punkte von F zusammenfällt. Von der Menge M werden demzufolge in jedem Näherungsbereiche F_n nur endlich viele Punkte liegen, und es ist also die Punktmenge M *abzählbar*. Jedem Punkte der Menge M denken wir uns noch eine positive ganze Zahl als Windungszahl zugeordnet, welche auch *unendlich* sein kann. Diese Windungszahl soll angeben, wieviel relative Blätter der jetzt zu konstruierenden relativ regulären Fläche Φ' in dem betreffenden Punkte jedesmal zusammenhängen.

Wir konstruieren wieder die oben erwähnten $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots$ Rückkehrschnitte, durch welche die Fläche F in eine schlichtartige Fläche F' verwandelt wird. Außerdem konstruieren wir jetzt von jedem Punkte der Menge M aus eine Linie, welche, wenn man sie weiter und weiter verfolgt, schließlich aus jedem der Bereiche F_n austritt, indem sie sich gewissermaßen der Grenze der Fläche F unbegrenzt nähert. Die Konstruktion dieser Linien bietet keine prinzipielle Schwierigkeit dar. Man gehe etwa von den Punkten der Menge M aus, welche in F_1 liegen, und konstruiere zunächst von diesen Punkten aus getrennt verlaufende Einschnitte nach der Begrenzung von F_1 hin. Darauf setze man diese Einschnitte in F_2 bis zur Begrenzung von F_2 fort, ohne nochmals nach F_1 zurückzukehren. Gleichzeitig konstruiere man von den in F_2 neu hinzugekommenen Punkten der Menge M aus nach der Begrenzung von F_2 hin je einen weiteren Einschnitt, so daß jeder dieser Einschnitte ganz außerhalb F_1 verläuft und keinen der früher gezogenen Schnitte trifft. Übergehend zu F_3 setze man zunächst die bereits gemachten Schnitte in F_3 je bis zu einem Begrenzungspunkte in F_3 fort, ohne dabei wieder nach F_2 zurückzukehren, und gleichzeitig mache man von den neu hinzugekommenen Punkten der Menge M neue Einschnitte nach der Begrenzung von F_3, die ganz außerhalb F_2 verlaufen. Das Verfahren läßt sich offenbar in infinitum fortsetzen und zwar so, daß alle gezogenen Rückkehrschnitte und Einschnitte durchaus getrennt verlaufen. Auf diese Weise wird die Fläche F' in eine ebenfalls schlichtartige Fläche F'' verwandelt, deren *innere* Begrenzungslinien teils geschlossen, teils ungeschlossen sind. Erstere rühren von den Rückkehrschnitten her und treten paarweise auf, letztere von den Einschnitten, und wir unterscheiden bei letzteren zwei längs jedes Einschnitts sich gegenüberliegende Hälften einer solchen Linie, die wir als die beiden *Seiten* dieser Begrenzungslinie bezeichnen wollen.

Die Fläche F'' dient uns nun als Grundexemplar zum Aufbau der Fläche Φ'. Wir denken uns zunächst an jede Rückkehrschnitt-Begrenzungslinie, sowie an jede Einschnittseite je ein Neuexemplar F'' angeheftet, wodurch F'' in eine Fläche $\overset{(1)}{F}''$ verwandelt wird, die ebenso wie F'' schlichtartig ist. Darauf denken wir uns an jede Rückkehrschnitt-Begrenzungslinie, sowie an jede Einschnittsseite von $\overset{(1)}{F}''$ je ein Neuexemplar F'' an-

geheftet, wodurch aus $\overset{(1)}{F}''$ eine Fläche $\overset{(2)}{F}''$ entsteht, die wiederum schlichtartig ist. Das Verfahren kann in infinitum fortgesetzt werden, indem man dabei noch folgende Vorschrift beachtet: Sobald vermöge der Aneinanderheftungen einer der Punkte der Menge M zu einem Windungspunkte der gewünschten Windungszahl geworden ist, wird dieser Punkt dadurch in einen inneren Punkt der betreffenden Fläche $\overset{(n)}{F}''$ verwandelt, daß man die von diesem Punkte ausgehenden beiden Einschnittseiten in den betreffenden Blättern zusammenheftet. Soll der Windungspunkt ein solcher unendlich hoher Ordnung werden, so hat man diese Regel einfach außer Acht zu lassen.

Die so entstehende Fläche

$$\Phi' = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F}''$$

wird in der Tat eine schlichtartige Überlagerungsfläche der Fläche F, welche die vorgeschriebenen relativen Windungspunkte besitzt und relativ regulär ist.

Man kann verlangen, auch die Fläche Φ', ebenso wie vorher die Fläche Φ, als Grenze endlich-vielblättriger, endlich-vielfach zusammenhängender Näherungsflächen darzustellen. Man erhält eine solche Darstellung sofort in der Gestalt

$$\Phi' = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F}_n'',$$

wobei $\overset{(n)}{F}_n''$ aus F_n in derselben Weise entsteht, wie $\overset{(n)}{F}''$ aus F. Die bei dem Heftungsprozeß behufs Bildung der Fläche $\overset{(n)}{F}_n''$ zu benutzenden Rückkehrschnitte und Einschnitte wird man dabei zweckmäßig als dieselben Rückkehrschnitte und Einschnitte wählen, welche auf F_n bereits gezogen sind.

§ 3—14. Das Abbildungsproblem der Uniformisierungstheorie.

§ 3. *Allgemeine Begriffsbestimmungen über unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche. Übersicht über die Entwicklungen in* § 4—11 *und* § 13.

In den folgenden Paragraphen 4—11 und 13 handelt es sich darum, nachzuweisen, daß man jede *schlichtartige* Fläche B, d. i. also eine solche *Riemann*sche Fläche, welche durch jeden auf ihr gezogenen Rückkehrschnitt in zwei Stücke zerfällt, umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten d. i. einblättrigen Bereich S abbilden kann. Dieser Nachweis ist unter den denkbar allgemeinsten Voraussetzungen zu erbringen.

Der Bereich B wird im allgemeinen unendlich-vielfach zusammenhängend sein und unendlich viele Windungspunkte besitzen, welche jedoch alle von endlicher Ordnung sind, da Windungspunkte unendlich hoher Ordnung als Grenzpunkte anzusehen sind. Der Bereich B ist im allgemeinen unendlich-vielblättrig, und es brauchen überhaupt keine Begrenzungslinien oder Grenzpunkte dieser Fläche vorhanden zu sein. Für die Methode, welche wir im folgenden zur Lösung des genannten Abbildungsproblems entwickeln werden, ist es wesentlich, daß wir die Aufgabe insofern noch spezieller fassen, als wir noch eine bestimmte Form der Begrenzung des Bereichs S vorschreiben. *Der Bereich S soll* nämlich *den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthalten und von lauter zur Achse des Reellen parallelen geradlinigen Strecken begrenzt sein, wobei jede einzelne Strecke sich auch auf einen Punkt reduzieren kann.*

Um den Sinn der letzteren Aussage präziser zu erfassen, stellen wir uns den Bereich S als Grenze endlich-vielfach zusammenhängender Näherungsbereiche $S_1 < S_2 < S_3 < \cdots$ vor, von welchen jeder vorhergehende als Teil im folgenden enthalten ist. Jede einzelne geschlossene Begrenzungslinie eines der Näherungsbereiche kann man sich etwa aus endlich vielen teils zur Achse des Reellen, teils zur Achse des Imaginären parallelen geradlinigen Strecken begrenzt denken. Die Begrenzungslinien der Bereiche S_n seien ferner aus lauter inneren Punkten des Bereichs S gebildet wie überhaupt von dem Bereiche S, ebenso wie von dem Bereiche B, lediglich die *inneren* Punkte als zum Bereiche gehörig betrachtet werden sollen.

Betrachten wir irgend zwei voneinander verschiedene Grenzpunkte P_1 und P_2 des Bereichs S, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erster Fall: die beiden Punkte P_1 und P_2 werden für jedes n von einer und derselben Begrenzungslinie des Bereichs S_n umschlossen. Zweiter Fall: die beiden Punkte P_1 und P_2 werden von einem gewissen n ab stets von zwei verschiedenen Begrenzungslinien des Bereichs S_n umschlossen. Im ersten Falle sagen wir, die Punkte P_1 und P_2 gehören einer und derselben *Einzelgrenze* des Bereichs S an, im zweiten Falle, sie gehören zwei verschiedenen Einzelgrenzen des Bereichs S an. Die Begrenzung des Bereichs S zerfällt dementsprechend in eine Menge von *Einzelgrenzen*, die wir auch als die *einzelnen Begrenzungslinien* des Bereichs S bezeichnen. Eine einzelne Begrenzungslinie des Bereichs S kann sich auch auf einen Punkt

reduzieren. Die Mannigfaltigkeit der einzelnen Begrenzungslinien des Bereichs S hat, allgemein zu reden, die *Mächtigkeit des Kontinuums.* Um eine einzelne Begrenzungslinie des Bereichs S zu definieren, kann man eine Folge von lauter ineinander geschachtelten Begrenzungslinien der Bereiche $S_1, S_2, S_3, \ldots$ betrachten, wobei die n-te Begrenzungslinie dem Bereiche S_n angehören soll. Sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ eine solche Folge, so wird derjenige einfach zusammenhängende Bereich der S-Ebene, von dem jeder einzelne Punkt außerhalb einer und daher unendlich vieler der erwähnten Linien λ liegt, zur vollständigen Begrenzung eben die durch die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ definierte Einzelgrenze von S haben.

Unsere oben gestellte Bedingung, daß der Bereich S von lauter zur Achse des Reellen parallelen geradlinigen Strecken begrenzt sein soll, ist nun so zu verstehen: Es soll jede einzelne Begrenzungslinie eine zur Achse des Reellen parallele geradlinige Strecke (*Schlitz*) von endlicher Länge sein, welche sich auch auf einen Punkt reduzieren kann; alle diese Schlitze sollen, insofern als der unendlich ferne Punkt innerer Punkt des Bereichs S sein soll, in einem endlichen Bezirke der Ebene enthalten sein.

Eine mit der soeben gegebenen Definition völlig gleichwertige Definition unseres allgemeinen *Schlitzbereichs* ist die folgende: Es soll, wenn mit $m_n^{(1)}, m_n^{(2)}, \ldots, m_n^{(\nu)}$ die Schwankungen (Unterschiede zwischen größtem und kleinstem Wert) der imaginären Koordinate auf den einzelnen Begrenzungslinien von S_n bezeichnet werden, ferner mit m_n der größte unter den genannten ν Werten, folgende Limesgleichung bestehen

$$\lim_{n=\infty} m_n = 0.$$

Die Übereinstimmung dieser Definition mit der vorhergehenden ist leicht zu erkennen und bedarf keiner näheren Erläuterung.

Der einfachste Fall unseres Abbildungsproblems tritt ein, wenn die Fläche B endlich-vielfach zusammenhängend und endlich-vielblättrig ist, dazu nur endlich viele innere Windungspunkte und wohldefinierte, geschlossene analytische Begrenzungslinien besitzt. In diesem Falle bestimmen wir diejenige Potentialfunktion U, welche in einem Punkte O $(x=x_0, y=y_0)$*) im Innern von B unstetig wird wie

*) Mit x, y werden jetzt die gewöhnlichen rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten in der Ebene des abzubildenden Bereichs bezeichnet, mit r, φ die Polarkoordinaten des Punktes mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y in bezug auf den Punkt O als Zentrum.

$$r^{-1}\cos\varphi \equiv \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

im übrigen auf der ganzen Fläche B eindeutig ist und auf der ganzen Begrenzung die Randbedingung *„normale Ableitung gleich Null"* erfüllt, eine Aufgabe, deren Lösung mittels der *Schwarz-Neumann*schen kombinatorischen Methoden bei Hinzunahme der Rückseite des betreffenden Bereichs in einfachster Weise gefunden wird. Die so gebildete Funktion U hat in der Interpretation von Herrn *Klein* die physikalische Bedeutung, daß sie den Spannungszustand darstellt, welcher einem aus einer in O befindlichen Doppelquelle entspringenden stationären elektrischen Strome entspricht, wenn längs aller Begrenzungslinien Isolierungen angebracht sind.

Verstehen wir jetzt unter B die allgemeinste *Riemann*sche Fläche, welche auch *nichtschlichtartig* sein kann, so ist es im Hinblick auf die erwähnte physikalische Bedeutung naheliegend, für die Fläche B die entsprechende Funktion U als Grenze der zu Näherungsflächen $B_1 < B_2 < B_3 < \cdots$ des Bereichs B gehörenden Strömungsfunktionen $U_1, U_2, U_3, \cdots$ zu konstruieren. Diesen Nachweis führen wir unten in folgender Weise.

Wir umgeben den Punkt O auf B mit einer kleinen Kreislinie k_ϱ mit dem Radius ϱ und O als Mittelpunkt. Mit K_ϱ bezeichnen wir die von k_ϱ begrenzte Kreisfläche auf B, mit B_ϱ die Fläche $(B-K_\varrho)$, ferner mit $B_{n,\varrho}$ die Fläche (B_n-K_ϱ). Den Punkt O denken wir uns in B_1 gewählt. Wir konstruieren nun zunächst, indem wir längs k_ϱ eine eindeutig bestimmte Folge von Randwerten vorschreiben, diejenige Potentialfunktion u_n, welche in $B_{n,\varrho}$ eindeutig erklärt ist, auf k_ϱ die genannten Randwerte annimmt und auf den übrigen Begrenzungslinien von $B_{n,\varrho}$, d. s. zugleich die Begrenzungslinien von B_n, die Randbedingung *„normale Ableitung gleich Null"* erfüllt. Darauf beweisen wir die gleichmäßige Konvergenz der Folge $u_1, u_2, \ldots$. Die Grenzfunktion $\lim_{n=\infty} u_n = u$ ist eine in B_ϱ eindeutige Potentialfunktion, welche auf k_ϱ die vorgeschriebenen Randwerte annimmt und bei welcher an Stelle der Randbedingung „normale Ableitung gleich Null", die im allgemeinen Falle ihren Sinn verlieren wird, eine fundamentale und zusammen mit der Randbedingung auf k_ϱ für die Funktion völlig charakteristische *Minimaleigenschaft* tritt. Nachdem die erwähnte Aufgabe für den Bereich B_ϱ gelöst ist, wird die gesuchte Funktion U nach den *Schwarz-Neumann*schen Prinzipien der gürtelförmigen Verschmelzung gefunden,

wobei es sich zeigt, daß man mit der erwähnten Minimaleigenschaft wie mit einer Randbedingung operieren kann. Von der Funktion U ergibt sich aus dem Verfahren zu ihrer Herstellung sofort, daß $U = \lim_{n=\infty} U_n$ ist, unter $U_1, U_2, \ldots$ die oben erklärten Näherungspotentiale verstanden. Die für die Funktion u bestehende Minimaleigenschaft überträgt sich auf die Funktion U als die *Hilbert*sche Minimaleigenschaft dieser Funktion.

Wir machen von der Minimaleigenschaft der Funktion U wesentlich Gebrauch, um zu beweisen, daß die Funktion $U+iV$, unter V die zu U konjugierte Potentialfunktion verstanden, im Falle der Schlichtartigkeit der Fläche B eine konforme Abbildung dieser Fläche auf einen *schlichten Schlitzbereich* S leistet, für welchen sich noch eine fundamentale metrische Bedingung ergibt, nämlich die folgende Bedingung: *Die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit des Bereichs S hat den Inhalt Null*, d. h.: es ist möglich, sie in endlich viele geschlossene Kurven von beliebig kleinem Gesamtflächeninhalt einzuschließen*).

§ 4. *Lösung einer speziellen Randwertaufgabe der Potentialtheorie nach Schwarz-Neumannschen Prinzipien***).

Es sei irgend ein Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben, endlich-vielblättrig, endlich-vielfach zusammenhängend, mit nur endlich vielen inneren Windungspunkten und von bestimmten geschlossenen Linien begrenzt, von denen jede einzelne von endlich vielen analytischen Stücken, etwa lauter geradlinigen Stücken, gebildet wird. Jede einzelne Begrenzungslinie von $\mathfrak{B}$ sei in endlich viele

---

*) An Stelle der einen Unstetigkeit $r^{-1}\cos\varphi$ kann man auch zwei voneinander verschiedene entgegengesetzt gleiche *logarithmische Unstetigkeiten* einführen oder auch zwei voneinander verschiedene entgegengesetzt gleiche *Arcustangens-Unstetigkeiten*. Die konforme Abbildung der schlichtartigen Fläche B findet dann im ersten Falle auf einen schlichten Bereich statt, welcher den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält und dessen einzelne Begrenzungslinien sämtlich auf ihrer Verlängerung den Nullpunkt enthalten, im zweiten Falle auf einen ebenfalls den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenden Bereich, von dem jede einzelne Begrenzungslinie ein Kreisbogen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist. Auf diese Erweiterungen gehe ich in dieser Abhandlung nicht näher ein. Ich verweise bezüglich derselben auf meine „vierte Mitteilung", Gött. Nachr. 1909.

**) Wir fassen diese Aufgabe wegen des ihr zukommenden Interesses hier etwas weiter, als wir tatsächlich hernach von ihr Gebrauch machen werden.

Teile geteilt, evtl. auch ungeteilt gelassen, und es seien auf den einzelnen Teilen *entweder die Randwerte* der gesuchten Potentialfunktion u gegeben, *oder aber die Bedingung „normale Ableitung gleich Null"*. Statt letzterer Bedingung kann man auch sagen: die konjugierte Potentialfunktion soll längs des betreffenden Begrenzungsteils einen (unbekannten) konstanten Wert haben. Die gesuchte Funktion u soll ferner in der ganzen Fläche $\mathfrak{B}$ eindeutig sein und ihrem absoluten Betrage nach im ganzen Gebiete unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Die letztere Angabe ist namentlich wegen der auf dem Rande befindlichen Teilpunkte gemacht, sowie auch wegen etwaiger Unstetigkeitspunkte für die auf dem Rande gegebenen Randwerte.

Die Funktion u ist durch die genannten Bedingungen vollständig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei Funktionen u_1 und u_2 der geforderten Beschaffenheit, so würde $(u_1 - u_2)$ eine in $\mathfrak{B}$ beschränkte Potentialfunktion sein, welche auf der Begrenzung teils verschwindet, teils die Bedingung „normale Ableitung gleich Null" erfüllt. Ist $\mathfrak{g}$ die obere Grenze der von der Funktion $|u_1 - u_2|$ angenommenen Werte, so gibt es einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Begrenzung, in dessen beliebiger Nähe die Funktion $|u_1 - u_2|$ dieselbe obere Grenze besitzt. Ist der Punkt $\mathfrak{P}$ ein solcher Punkt der Begrenzung, für welchen zu beiden Seiten desselben auf der Begrenzung Randwerte gegeben sind, so muß die Funktion $(u_1 - u_2)$ aus allgemeinen Gründen der Potentialtheorie*) sich im Punkte $\mathfrak{P}$ stetig auf Null reduzieren. Es wäre also $\mathfrak{g} = 0$. Liegt $\mathfrak{P}$ in einem solchen Teile der Begrenzung, in welchem durchweg die Bedingung „normale Ableitung gleich Null" gestellt ist, so denke man sich den bei $\mathfrak{P}$ an die Begrenzung anstoßenden Flächenteil β von $\mathfrak{B}$ auf die Fläche eines gestreckten Winkels abgebildet, wobei etwa der Punkt $\mathfrak{P}$ selber in den Scheitelpunkt des gestreckten Winkels übergehe. Die Funktion $(u_1 - u_2)$ wird dadurch eine Funktion des Ortes in der Ebene des gestreckten Winkels, und man kann diese Funktion auch für die Fläche desjenigen gestreckten Winkels, welcher den ersteren zur Fläche eines vollen Kreises ergänzt, dem Spiegelungsprinzip entsprechend erklären, indem man an solchen Punkten, welche in bezug auf die Schenkel des gestreckten Winkels spiegelbildlich symmetrisch liegen, gleiche Werte vorschreibt. Die Funktion $(u_1 - u_2)$ wird dadurch eine für die Umgebung des

*) Vgl. *H. A. Schwarz.* a. a. O.

Scheitelpunktes des gestreckten Winkels eindeutige und beschränkte, also auch im Scheitelpunkt selbst reguläre Potentialfunktion, die den bestehenden Bedingungen gemäß im Scheitelpunkt ein Maximum ihres absoluten Betrages besitzt; dies ist nur dann möglich, wenn die Funktion $(u_1 - u_2)$ sich auf eine Konstante reduziert.

Nehmen wir schließlich den Fall an, daß längs der Begrenzungslinie auf der einen Seite des Punktes $\mathfrak{P}$ die Randwerte Null, auf der anderen Seite die Bedingung „normale Ableitung gleich Null" für die Funktion $(u_1 - u_2)$ gilt, so können wir wieder zur Fläche des gestreckten Winkels übergehen. Wir spiegeln jetzt an demjenigen Schenkel, längs dessen die Bedingung „normale Ableitung gleich Null" besteht. Die Funktion $(u_1 - u_2)$ wird dann eine Potentialfunktion, welche in der längs eines Radius aufgeschlitzten Vollkreisfläche eindeutig und beschränkt erklärt ist und zu beiden Seiten jenes Radius verschwindet; daraus folgt wieder, nach den erwähnten *Schwarz*schen Prinzipien mit Rücksicht auf die Beschränktheit der Funktion, daß diese Funktion sich auch im Mittelpunkte der Kreisfläche stetig verhält und also verschwindet.

Die Größe $\mathfrak{g}$ ergibt sich somit in allen Fällen gleich Null und folglich ist die Funktion $(u_1 - u_2)$ identisch Null.

Mit Benutzung der Rückseite der Fläche $\mathfrak{B}$ läßt sich der soeben durchgeführte *Unitätsbeweis* noch knapper fassen. Man denke sich die Rückseite der Fläche $\mathfrak{B}$ mit der Vorderseite dadurch zu *einer* Fläche gemacht, daß man längs der Linien mit der Randbedingung „normale Ableitung gleich Null" den Übergang von der einen Seite auf die andere Seite gestattet. Die so erhaltene Doppelfläche hat diejenigen Linien, längs deren die Randwerte gegeben sind, zu Begrenzungslinien. Denkt man sich nun die Funktion $(u_1 - u_2)$ auf der Rückseite genau mit denselben Werten wie auf der Vorderseite definiert, so ist diese Funktion dadurch zu einer auf der ganzen Doppelfläche eindeutigen und im Innern derselben regulär erklärten Funktion gemacht, die auf der ganzen Begrenzung der Doppelfläche verschwindet und daher identisch verschwindet. Die Beurteilung des regulären Verhaltens in einem Punkte der Doppelfläche hat dabei insbesondere längs der Faltungslinien der Doppelfläche eine konforme Abbildung der Umgebung des betreffenden Punktes der Doppelfläche auf ein schlichtes (ungefaltetes) Stück zur Voraussetzung.

Was nun die *Existenz der Funktion* u anbetrifft, so genügen wenige Bemerkungen. Man fasse die Fläche $\mathfrak{B}$ in der angegebenen Weise als eine Doppelfläche $\overline{\mathfrak{B}}$ auf. Längs der Begrenzungslinien dieser Doppelfläche schreibe man die gegebenen Randwerte vor, und zwar zu beiden Seiten dieser Linien dieselben Randwerte. Die Funktion u wird dann als Funktion auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit den erwähnten Randwerten nach den *Schwarz-Neumann*schen Methoden unmittelbar gefunden. Diese Funktion u besitzt die Eigenschaft, an entsprechenden Punkten P_1 und P_2 auf Vorderseite und Rückseite stets einen und denselben Wert anzunehmen; denn die Differenz $(u(P_1)-u(P_2))$ ist eine auf der ganzen Doppelfläche reguläre Potentialfunktion, die auf der ganzen Begrenzung derselben verschwindet.

Denkt man sich nun, wie soeben, die auf der Doppelfläche genommene Umgebung eines Punktes auf einer Faltungslinie konform auf die Fläche eines schlichten Kreises abgebildet, sodaß das betrachtete Stück der Faltungslinie etwa in die Achse des Reellen übergeht, so wird die Funktion u, als Funktion des Ortes in der Ebene des Kreises aufgefaßt, eine solche Funktion sein, die an je zwei in bezug auf die Achse des Reellen spiegelbildlich symmetrischen Punkten einen und denselben Wert annimmt. Daraus folgt aber unmittelbar, daß die normale Ableitung längs der Achse des Reellen verschwindet. Letztere Eigenschaft überträgt sich nun rückwärts sofort auf die Funktion u, aufgefaßt als Funktion des Ortes auf der Fläche $\mathfrak{B}$.

Man kann ebenso wie vorher beim Unitätsbeweise die Benutzung der Rückseite bei der Bestimmung der Funktion u auch vollständig vermeiden, indem man die kombinatorischen Methoden direkt auf den Bereich $\mathfrak{B}$ selbst anwendet. Der Umstand, daß längs der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ bald die Randwerte, bald die Bedingung „normale Ableitung gleich Null“ gegeben ist, ist dabei nicht als ein Hindernis zu betrachten. Man hat jedoch von den beiden oben benutzten Tatsachen Gebrauch zu machen, daß einerseits über ein Begrenzungsstück mit der Randbedingung „normale Ableitung gleich Null“ die Fortsetzung gemäß dem Spiegelungsprinzip stattfindet und daß an einem Punkte eines solchen Begrenzungsstücks die Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum haben kann. Auf Grund dieser Tatsachen erhält man nämlich die für den Konvergenzbeweis (bei der alternierenden Methode) zu benutzenden, unterhalb Eins liegenden Hilfsgrößen, vermöge deren die Vergleichung mit einer geometrischen Reihe gelingt.

Bemerkung: Es werde noch eine einfache Erweiterung der soeben behandelten Aufgabe betrachtet. Wir verlangen von der Funktion u, daß sie längs der Randstücke der einen Kategorie vorgegebene Randwerte annimmt, daß sie ferner in $\mathfrak{B}$ eindeutig und regulär ist, daß schließlich auf den Randstücken der zweiten Kategorie die zugehörende *konjugierte Potentialfunktion*, die ihrerseits periodisch vieldeutig sein kann, *bis auf eine additive Konstante vorgegebene Randwerte* annehmen soll*). Die erwähnte additive Konstante ist dabei als unbekannt zu betrachten und wird sich im allgemeinen von Randstück zu Randstück ändern. Durch die angegebenen Bedingungen ist die Funktion u bestimmt. Denn die Differenz zweier Funktionen u_1 und u_2, die den Bedingungen genügen mögen, ist eine Funktion, welche auf den Randstücken der ersten Art stetig Null wird, auf den Randstücken der zweiten Art ein konstant werdendes konjugiertes Potential besitzt, welch letzteres mithin über dieses Randstück hinweg analytisch fortsetzbar ist. Demnach wird $(u_1 - u_2)$ auf den Randstücken der zweiten Kategorie die Bedingung „normale Ableitung gleich Null" erfüllen. Nach früherem muß sich also die Funktion $(u_1 - u_2)$ identisch auf Null reduzieren.

Die Funktion u wird nun folgendermaßen gefunden. Wir bestimmen zunächst eine eindeutige Potentialfunktion α, welche auf den Randstücken der ersten Kategorie die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, auf den Randstücken der zweiten Kategorie die Bedingung „normale Ableitung gleich Null" erfüllt, so daß längs der letzteren Stücke das konjugierte Potential α' konstant wird. Darauf bestimmen wir eine eindeutige Potentialfunktion β', welche auf den Randstücken der zweiten Kategorie die vorgeschriebenen Werte annimmt, auf denen der ersten Kategorie die Bedingung „normale

*) Die Bedingung für die Randstücke der zweiten Kategorie kann auch so formuliert werden: Es soll längs dieser Randstücke die normale Ableitung der Funktion u vorgeschriebene Werte erhalten. Randwertprobleme dieser Art wurden zuerst von *Volterra* behandelt (Ann. di Mat. 2, XI, [1883]). Ich verweise ferner auf die kritischen Bemerkungen, welche *Schwarz* dazu macht (Fortschr. der Math., XV), sowie auf *Hilbert* (Verhandl. d. 3. intern. Math.-Kongr., Heidelberg 1904 [Leipzig 1905], S. 233 und „Grundz. einer allgem. Theorie der linearen Integralgleichungen, 3. Mitteil.", Gött. Nachr. 1905), und schließlich auf *Haseman* („Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben in der Funktionentheorie", Dissertation, Göttingen 1907).

Ableitung gleich Null" erfüllt, so daß die konjugierte Funktion β längs der letzteren konstant wird. Die Funktion $\alpha+\beta$ nimmt dann auf den Randstücken der ersten Kategorie Randwerte an, die sich von den gegebenen um Konstante unterscheiden. Es wird diese Funktion auch noch innere Periodizitätsmoduln aufweisen. Nunmehr bilden wir eine Potentialfunktion γ mit denselben Periodizitätsmoduln und den erwähnten konstanten Werten als Randwerten auf den Begrenzungsstücken der ersten Kategorie, sowie mit der Bedingung „normale Ableitung gleich Null" auf den Randstücken der zweiten Kategorie*). Dann ist die Funktion $\alpha+\beta-\gamma$ die gesuchte Funktion.

§ 5. *Die Funktion u_n und ihre charakteristische Hilbertsche***) *Minimaleigenschaft.*

Wir betrachten jetzt die für den Bereich $B_{n,\varrho}$ definierte Funktion u_n, welche auf dem Kreise k_ϱ eine vorgeschriebene eindeutige Folge von Randwerten annimmt und auf den anderen Begrenzungslinien von $B_{n,\varrho}$ die Randbedingung „normale Ableitung gleich Null" erfüllt. Diese Funktion existiert nach § 4 und ist durch ihre Randbedingungen vollständig bestimmt. Die Funktion u_n besitzt folgende im weiteren Verlaufe der Untersuchung wichtige *Minimaleigenschaft*: Ist w irgendeine in $B_{n,\varrho}$ einschließlich der Begrenzung stückweise analytisch erklärte stetige eindeutige Funktion, welche auf k_ϱ verschwindet, so ist stets der Wert des *Dirichlet*schen Integrales

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n+w)\equiv\iint\limits_{B_{n,\varrho}}\left[\left(\frac{\partial(u_n+w)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(u_n+w)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

größer als

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n)\equiv\iint\limits_{B_{n,\varrho}}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

also in abgekürzter Schreibweise

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n+w)>\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n).$$

Es ist nämlich

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n+w)=\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n)+\underset{B_{n,\varrho}}{D}(w)+2\iint\limits_{B_{n,\varrho}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

---

*) Die Bestimmung dieser Funktion bietet nach den *Schwarz-Neumann*schen Prinzipien bei Beachtung der oben in diesem Paragraphen gemachten Bemerkungen keine Schwierigkeit.

**) So genannt wegen der Analogie zu *Hilbert*s Minimaleigenschaft für U, § 10.

Das letzte Doppelintegral formen wir durch partielle Integration um unter Berücksichtigung der Gleichung $\Delta(u_n)=0$

$$\iint\limits_{B_{n,\varrho}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{k_\varrho} w\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\,d\sigma+\int\limits_{b_n} w\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\,d\sigma,$$

wobei mit $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}$ die normale Ableitung längs k_ϱ bzw. längs b_n, d. i. die Begrenzung von B_n, bezeichnet ist. Das Kurvenintegral über k_ϱ verschwindet, weil w auf k_ϱ verschwindet, das über b_n, weil die normale Ableitung auf b_n verschwindet. Also ergibt sich

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n+w)=\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n)+\underset{B_{n,\varrho}}{D}(w).$$

Wir müssen, um die angegebene Minimaleigenschaft formulieren zu können, die Annahme machen, daß das Integral $\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n)$ existiert, was jedenfalls dann der Fall ist, wenn die längs k_ϱ vorgeschriebenen Randwerte der Funktion u eine reguläre analytische Folge bilden*); in dem allgemeineren Falle, in welchem die Randwerte nur stetig gegeben sind, hat man an Stelle der obigen Minimaleigenschaft folgende Minimaleigenschaft treten zu lassen. Man beschreibe um O als Mittelpunkt auf B eine zweite Kreislinie k_ϱ mit einem Radius $\varrho_1>\varrho$, wobei der Radius ϱ_1 nur wenig größer als ϱ gewählt sei, um Windungspunkte zu vermeiden. Wird mit w eine nur in B_{n,ϱ_1} einschließlich der Begrenzung stetig und stückweise analytisch erklärte, auf k_{ϱ_1} verschwindende Variation bezeichnet, so ist aus demselben Grunde wie oben

$$\text{(1.)}\qquad \underset{B_{n,\varrho_1}}{D}(u_n+w)>\underset{B_{n,\varrho_1}}{D}(u_n).$$

Diese Minimaleigenschaft kann für den Fall analytischer Randwerte aus der erstformulierten Minimaleigenschaft sofort hergeleitet werden. Man hat nur nötig, die oben betrachtete Variation w in dem Ring zwischen k_ϱ und k_{ϱ_1} identisch gleich Null zu wählen, indem man sie im übrigen beliebig läßt.

Die angegebene Minimaleigenschaft ist nun für die Funktion u_n zusammen mit der Randbedingung auf k_ϱ völlig charakteristisch. Betrachten wir zunächst den Fall analytisch gegebener Randwerte, so ergibt sich aus der Annahme der Existenz einer zweiten Funktion u_n', die denselben Bedingungen genügen möge, folgendes:

---

*) Für unsern Hauptzweck würde die Beschränkung auf diesen Fall ausreichen.

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n') = \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n) + \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n'-u_n) + 2\iint_{B_{n,\varrho}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial (u_n'-u_n)}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial (u_n'-u_n)}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Da nun u_n' ebenso wie u_n Minimalfunktion sein soll in dem oben angegebenen Sinne, so muß sein

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n') = \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n),$$

also

$$(2.)\qquad \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n'-u_n) = -2\iint_{B_{n,\varrho}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial (u_n'-u_n)}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial (u_n'-u_n)}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Andererseits muß für jede in $B_{n,\varrho}$ gebildete, auf k_ϱ verschwindende Variation w die Gleichung gelten

$$(3.)\qquad \iint_{B_{n,\varrho}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

da andernfalls, wenn mit $\varkappa$ der von Null verschieden gedachte Wert dieses Ausdrucks und mit ε eine Konstante bezeichnet wird, aus der Gleichung

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n + \varepsilon w) = \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n) + \varepsilon^2 \underset{B_{n,\varrho}}{D}(w) + 2\varkappa\varepsilon$$

gefolgert werden kann, daß bei passend gewähltem Vorzeichen von ε und hinreichend kleinem ε

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n + \varepsilon w) < \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n),$$

entgegen der Minimaleigenschaft der Funktion u_n. Läßt man an Stelle von w in der Gleichung (3.) speziell die Funktion $(u_n'-u_n)$ treten, so ergibt sich aus (2.)

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n'-u_n) = 0;\ \text{d. h. } u_n'-u_n = \text{konst.}$$

Die Konstante kann dabei nur Null sein, weil die Funktion $(u_n'-u_n)$ auf k_ϱ verschwindet.

Betrachten wir den allgemeinen Fall stetiger Randwerte längs k_ϱ, so schließen wir aus der Annahme der Existenz einer von u_n verschiedenen Funktion u_n' mit denselben Randwerten auf k_ϱ und derselben Minimaleigenschaft (1.) folgendermaßen die Übereinstimmung der beiden Funktionen u_n und u_n':

Es sind wegen der vorausgesetzten Minimaleigenschaft für jede in B_{n,ϱ_1} gebildete stückweise analytische Variation w, die auf k_{ϱ_1} verschwindet, die Variationsgleichungen erfüllt

$$\iint_{B_{n,\varrho_1}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy = 0, \qquad \iint_{B_{n,\varrho_1}} \left(\frac{\partial u_n'}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_n'}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

woraus folgt, daß für die Funktion $(u_n'-u_n)$ die Variationsgleichung besteht

$$(4.) \qquad \iint\limits_{B_{n,\varrho_1}} \left(\frac{\partial(u_n'-u_n)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial(u_n'-u_n)}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Aus dieser Gleichung schließen wir

$$D_{B_{n,\varrho_1}}(u_n'-u_n+w)=D_{B_{n,\varrho_1}}(u_n'-u_n)+D_{B_{n,\varrho_1}}(w).$$

Es besitzt demnach die Funktion $(u_n'-u_n)$ dieselbe Minimaleigenschaft wie u_n und u_n', ferner verschwindet $(u_n'-u_n)$ längs k_ϱ. Ich behaupte nun, daß die Funktion $(u_n'-u_n)$ in B_{n,ϱ_1} ihr Maximum und Minimum auf k_{ϱ_1} annimmt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnten wir von der Funktion $(u_n'-u_n)$ dadurch zu einer Funktion mit kleinerem *Dirichlet*schem Integral übergehen, daß wir in denjenigen Teilen der Fläche B_{n,ϱ_1}, in welchen der Wert der Funktion $(u_n'-u_n)$ größer ist als der Maximalwert oder kleiner als der Minimalwert auf k_{ϱ_1}, diese Funktion ersetzen durch den erwähnten Maximalwert bzw. Minimalwert.

Die Funktion $(u_n'-u_n)$ verschwindet nun auf k_ϱ und würde demnach, wenn sie nicht in $B_{n,\varrho}$ überall gleich Null ist, ein inneres Maximum und Minimum haben, was einer bekannten Eigenschaft der Potentialfunktionen widerspricht.

Ohne die Idee des Maximums und Minimums benutzen zu müssen, kann man auch folgendermaßen vorgehen. Aus der Gleichung (4.) folgere man unter Beachtung des Umstandes, daß $(u_n'-u_n)$ auf k_ϱ verschwindet und also bis in k_ϱ hinein regulär ist, das Bestehen der analogen Variationsgleichung für den Bereich $B_{n,\varrho}$, indem man unter w eine nicht nur in B_{n,ϱ_1}, sondern auch in $B_{n,\varrho}$ erklärte Variation versteht. Jede derartige Variation kann als Summe zweier Variationen dargestellt werden, von welchen die eine nur in B_{n,ϱ_1} von Null verschieden ist und auf k_{ϱ_1} verschwindet, die andere nur in $(B_{n,\varrho}-B_{n,\varrho_2})$, wobei $\varrho_2>\varrho_1$, von Null verschieden ist und auf k_ϱ und k_{ϱ_2} verschwindet. Für letztere Variation insbesondere ist die Variationsgleichung ohne weiteres erfüllt; denn durch partielle Integration geht das Doppelintegral über in $\int w\frac{d(u_n'-u_n)}{d\nu}d\sigma$.

Nachdem die Variationsgleichung für $B_{n,\varrho}$ hergeleitet ist, befindet man sich auf dem alten, oben betrachteten Standpunkte regulär analytisch gegebener Randwerte.

Ich will schließlich noch folgendes bemerken:

Anstatt direkt aus der Minimaleigenschaft auf die Übereinstimmung der Funktionen u_n und u_n' zu schließen, kann man auch von der Minimaleigenschaft aus erst auf das Bestehen der Randbedingung „normale Ableitung gleich Null" schließen und von da aus die Übereinstimmung der Funktionen u_n und u_n' auf Grund des Unitätsbeweises S. 213 konstatieren. Formt man nämlich die Variationsgleichung durch partielle Integration um, so ergibt sich

$$\int w \frac{du_n}{dv} d\sigma = 0,$$

das Integral erstreckt über die Begrenzung desjenigen Gebietes, für welches w erklärt ist. Wäre nun die normale Ableitung von u_n längs eines Teiles der Begrenzung von $B_{n,\varrho}$ bzw. B_{n,ϱ_1} von Null verschieden, so könnte man die Variation w speziell so bestimmen, daß sie in der Nähe der betrachteten Stelle ein bestimmtes Vorzeichen bekommt und sonst auf der ganzen Begrenzung verschwindet. Bei dieser Wahl der Variation könnte das Kurvenintegral sicher nicht verschwinden.

§ 6. *Existenz der Funktion* $\lim u_n = u$*).

Wir betrachten nun die Folge der Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$, deren n-te für den Bereich $B_{n,\varrho}$ erklärt ist. Alle diese Funktionen sollen längs k_ϱ eine und dieselbe Folge vorgeschriebener Randwerte annehmen, und zwar wollen wir die Annahme machen, daß die gegebenen Randwerte eine reguläre analytische Folge bilden**).

Unter den genannten Voraussetzungen hat das *Dirichlet*sche Integral $D(u_n)$ einen endlichen Wert, welchen wir mit Δ_n bezeichnen. Der Wert Δ_n ist zufolge der Minimaleigenschaft der Funktion u_n der Minimalwert des *Dirichlet*schen Integrales $D(f)$, wenn als Funktionen f alle in $B_{n,\varrho}$ einschließlich der Begrenzung stückweise analytischen, stetigen Funktionen zugelassen werden, die auf k_ϱ die erwähnten Randwerte annehmen. Wird mit λ irgendeine in $B_{1,\varrho}$ stückweise analytische, stetige, auf k_ϱ die gegebenen Randwerte annehmende, auf der Begrenzung von $B_{1,\varrho}$ verschwindende, in

*) Die Entwicklungen in §§ 6—7 vergleiche man mit parallel laufenden Entwicklungen meiner „vierten Mitteilung" S. 338—343, sowie mit *R. Courant*, Dissertation, S. 23—29.

**) Für den Hauptzweck, nämlich die Bestimmung der Funktion u, ist diese Annahme ausreichend. Man lese weiter unten S. 230 die Bemerkungen, betreffend den Fall stetiger Randwerte.

$(B_\varrho - B_{1,\varrho})$ identisch verschwindende Funktion bezeichnet, so ist $\underset{B_{1,\varrho}}{D(\lambda)} = \underset{B_{n,\varrho}}{D(\lambda)} = \underset{B_\varrho}{D(\lambda)}$. Da λ eine für jeden Wert des Index n zur Konkurrenz zulässige Funktion ist, haben wir

$$\Delta_n < \underset{B_\varrho}{D(\lambda)}.$$

Ich zeige nun weiter, daß

$$(*) \qquad \Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \cdots$$

ist. Betrachten wir etwa den Wert Δ_n, so ist bei Berücksichtigung der Minimaleigenschaft der Funktion u_n

$$\Delta_n = \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_n)} < \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_{n+1})} < \underset{B_{n+1,\varrho}}{D(u_{n+1})} = \Delta_{n+1},$$

also für jeden Wert des Index n

$$\Delta_n < \Delta_{n+1}.$$

Auf die Konvergenz der Folge $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ gründet sich nun unser Konvergenzbeweis für die Folge $u_1, u_2, \ldots$. Wir wollen zeigen, daß für beliebiges fest zu denkendes ganzzahliges positives n_0 und beliebig klein gegebenes positives ε im Gebiete $B_{n,\varrho}$

$$|u_{n+m} - u_n| < \varepsilon$$

wird, indem man nur n hinreichend groß wählt, unter m eine in jeder Hinsicht willkürlich bleibende positive ganze Zahl verstanden.

Es ist wegen des Verschwindens der ersten Variation

$$\underset{B_{n+m,\varrho}}{D(u_{n+m})} > \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_{n+m})} = \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_n)} + \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_{n+m} - u_n)},$$

also

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D(u_{n+m} - u_n)} < \Delta_{n+m} - \Delta_n,$$

daher auch, wenn wir n der Bedingung $n > n_0$ unterwerfen,

$$\underset{B_{n_0,\varrho}}{D(u_{n+m} - u_n)} < \Delta_{n+m} - \Delta_n.$$

Die rechte Seite vorstehender Formel wird nun in der Tat wegen (*) beliebig klein, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird. Damit wird auch die auf der linken Seite stehende positive Größe beliebig klein. Es kommt nun darauf an, einen Schluß auf das Unendlichkleinwerden der Funktion $(u_{n+m} - u_n)$ selbst zu machen aus dem Unendlichkleinwerden ihres *Dirichlet*schen Integrales. Um diesen Schluß machen zu können, benötigen wir folgenden Hilfssatz*) (vgl. meine „vierte Mitteilung", B.).

---

*) Im wesentlichen derselbe Satz ist von Herrn *Courant* (Dissertation) gefunden und auf andere Weise bewiesen worden.

Hilfssatz: Es sei $\varphi(x, y)$ irgend eine für $x^2+y^2<1$ regulär und eindeutig erklärte, im Punkte $x=y=0$ selbst verschwindende Potentialfunktion, für welche das Dirichletsche Integral $D(\varphi)=\iint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$, erstreckt über die ganze Fläche des Einheitskreises, einen Wert <1 hat; es sei q eine der Ungleichheitsbedingung $0<q<1$ genügende Größe. Dann gibt es eine Größe g, so daß für alle den obigen Bedingungen genügenden Funktionen φ in dem Gebiete $x^2+y^2<q^2$ die Ungleichheit $|\varphi|<g$ besteht.

Beweis: Es sei ϱ eine fest zu denkende positive Größe $<1-q$. Ist (x, y) ein Punkt, für welchen $x^2+y^2<q^2$ ist, so bleibt der um den Punkt (x, y) als Mittelpunkt mit dem Radius ϱ beschriebene Kreis ganz innerhalb des Einheitskreises. Indem wir den *Gauß*schen Mittelwertsatz für Potentialfunktionen anwenden, erhalten wir für $\varrho'<\varrho$

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2\pi\varrho'}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\varphi(x+\varrho'\cos\varphi,\ y+\varrho'\sin\varphi)\,\varrho'\,d\varphi,$$

$$\int_{\varrho'=0}^{\varrho}\varphi(x, y)\,2\pi\varrho'\,d\varrho'=\int_{\varrho'=0}^{\varrho}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(\varphi(x+\varrho'\cos\varphi,\ y+\varrho'\sin\varphi)\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi,$$

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{\pi\varrho^2}\int_{\varrho'=0}^{\varrho}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\varphi(x+\varrho'\cos\varphi,\ y+\varrho'\sin\varphi)\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\pi\varrho^2}\int_{\varrho'=0}^{\varrho}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x+\varrho'\cos\varphi,\ y+\varrho'\sin\varphi)\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi,$$

also, weil allgemein $|a|<\frac{1}{2}(a^2+1)$ ist,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|<\frac{1}{2\pi\varrho^2}\int_{\varrho'=0}^{\varrho}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x+\varrho'\cos\varphi,\ y+\varrho'\sin\varphi)\right)^2+1\right]\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi$$

$$<\frac{1}{2\pi\varrho^2}(D(\varphi)+\pi\varrho^2),\ D(\varphi)\text{ erstreckt über den Einheitskreis,}$$

$$<\frac{1}{2\pi\varrho^2}+\frac{1}{2}.$$

Es ergibt sich also

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|<\frac{1}{2\pi(1-q)^2}+\frac{1}{2},\ \text{ebenso}\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|<\frac{1}{2\pi(1-q)^2}+\frac{1}{2},$$

mithin für $x^2+y^2<q^2$ und $\varphi(0, 0)=0$

$$|\varphi|<q\left(\frac{1}{\pi(1-q)^2}+1\right)=g,\qquad \text{q. e. d.}$$

Aus dem soeben entwickelten Hilfssatze folgt:

Folgerung: Die Funktion $|\varphi|$ wird im Gebiete $x^2+y^2<q^2$ zugleich mit dem Werte ihres über die ganze Fläche des Einheitskreises erstreckten *Dirichlet*schen Integrales gleichmäßig unendlich klein.

Ist nämlich ε^2 der Wert des *Dirichlet*schen Integrales für die Funktion φ, so ist für $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ der Wert des *Dirichlet*schen Integrales <1, also ist $\left|\frac{\varphi}{\varepsilon}\right|<g$, wenn $|x^2+y^2|<q^2$ ist, mithin $|\varphi|<\varepsilon g$.

Verschwindet die Funktion φ im Punkte $x=y=0$ nicht, so folgt aus dem Unendlichkleinwerden des *Dirichlet*schen Integrales auf Grund des vorhergehenden, daß die Wertschwankung der Funktion φ im Gebiete $x^2+y^2<q^2$ unendlich klein wird.

Um die Anwendung unseres Satzes auf die Funktion $(u_{n+m}-u_n)$ zu machen, bemerken wir, daß diese wegen ihres Verschwindens auf k_ϱ nach dem *Schwarz*schen Spiegelungsprinzip über die Linie k_ϱ hinweg analytisch fortgesetzt werden kann, wobei der Bereich B_ϱ in einen Bereich B'_ϱ übergeht, $B_{n,\varrho}$ in einen Bereich $B'_{n,\varrho}$. Da das *Dirichlet*sche Integral gegenüber konformer Abbildung der Ebene der unabhängigen Variablen invariant ist, so ergibt sich, daß der Wert des *Dirichlet*schen Integrales $D_{B_{n_0+1,\varrho}+B'_{n_0+1,\varrho}}(u_{n+m}-u_n)$ ebenfalls unendlich klein wird, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird. Wir können nun mit einer endlichen Anzahl von Kreisscheiben die Fläche $B_{n_0,\varrho}$ einschließlich ihrer Begrenzung so bedecken, daß jeder Punkt dieses Bereichs innerer Punkt von mindestens zweien der Kreise wird. Um Windungspunkte kann man sich Windungskreisflächenstücke konstruiert denken, die durch konforme Abbildung mittels einer Wurzelgröße in gewöhnliche Kreisflächenstücke verwandelt werden können. Durch Einschaltung einer endlichen Kette von Kreisen, deren je zwei aufeinander folgende übereinandergreifen, gelangen wir von jedem Punkte des Gebietes $B_{n_0,\varrho}$ nach einem Punkte auf k_ϱ. Da nun auf k_ϱ die Funktion $(u_{n+m}-u_n)$ verschwindet, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung unserer obigen „*Folgerung*“ bzw. der daran angeschlossenen Bemerkung, daß die Funktion $|u_{n+m}-u_n|$ im ganzen Gebiete $B_{n_0,\varrho}$ kleiner als eine beliebig klein gewählte Größe ε gemacht werden kann, dadurch daß man nur n hinreichend groß wählt.

§ 7. *Der Wert des Dirichletschen Integrales* $\underset{B_\varrho}{D(u)}$ *und die charakteristische Hilbertsche Minimaleigenschaft der Funktion* u.

Es war $\underset{B_{n,\varrho}}{D(u_n)} = \Delta_n$ gesetzt worden, und wir hatten $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \cdots$ gefunden. Es soll nun bewiesen werden, daß, wenn $\lim_{n=\infty} \Delta_n = \Delta$ gesetzt wird, folgende Gleichung besteht

(1.) $$\underset{B_\varrho}{D(u)} = \Delta.$$

Es kann zunächst $\underset{B_\varrho}{D(u)}$ nicht kleiner sein als Δ. Denn ist etwa

$$\underset{B_\varrho}{D(u)} = \Delta - c^2,$$

unter c^2 eine positive von Null verschiedene Größe verstanden, so ist

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D(u)} < \Delta - c^2.$$

Andererseits ist wegen der Minimaleigenschaft der Funktion u_n, weil u eine in $B_{n,\varrho}$ analytische Funktion ist,

$$\Delta_n = \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_n)} < \underset{B_{n,\varrho}}{D(u)};$$

also müßte sein

$$\Delta_n < \Delta - c^2,$$

und zwar für jedes n. Dies widerspricht jedoch der Gleichung $\lim_{n=\infty} \Delta_n = \Delta$. Nehmen wir nur andererseits an, daß $\underset{B_\varrho}{D(u)}$ einen Wert $> \Delta$ habe, also etwa

$$\underset{B_\varrho}{D(u)} = \Delta + c^2,$$

so müßte für hinreichend großes n_0 auch die Ungleichheit bestehen

(2.) $$\underset{B_{n_0,\varrho}}{D(u)} > \Delta + \frac{1}{2} c^2;$$

nun geht in $B_{n_0,\varrho}$ die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ gleichmäßig in u über; daher ist auch, weil die zu betrachtenden Funktionen Potentialfunktionen sind,

$$\underset{B_{n_0,\varrho}}{D(u)} = \lim_{n=\infty} \underset{B_{n_0,\varrho}}{D(u_n)}.$$

Es ist mithin

$$\underset{B_{n_0,\varrho}}{D(u)} < \lim_{n=\infty} \underset{B_{n,\varrho}}{D(u_n)} = \lim_{n=\infty} \Delta_n = \Delta;$$

also ergibt sich in Beachtung von (2.) die unmögliche Ungleichheit

$$\Delta > \Delta + \frac{1}{2} c^2.$$

Hiermit ist das Bestehen der Gleichung (1.) bewiesen.

Beachtet man, daß der Wert Δ_n des Doppelintegrals $\underset{B_{n,\varrho}}{D(u_n)}$ gleich

dem Kurvenintegral $\int_{k_\varrho} u_n \frac{du_n}{dv} d\sigma$ ist, so ergibt sich aus dem Resultat (1.) sofort die Gleichung

$$\underset{B_\varrho}{D}(u) = \int_{k_\varrho} u \frac{du}{dv} d\sigma.$$

Nachdem wir gefunden haben, daß $\underset{B_\varrho}{D}(u) = \Delta$ ist, ergibt sich leicht, daß unter allen in B_ϱ einschließlich k_ϱ stückweise analytischen Funktionen mit endlichem *Dirichlet*schem Integral und mit den für u auf k_ϱ vorgeschriebenen Randwerten die Funktion u den kleinsten Wert des *Dirichlet*schen Integrales liefert und daß diese Funktion durch die genannte Minimaleigenschaft in Verbindung mit der Randbedingung auf k_ϱ vollständig bestimmt ist.

Nehmen wir etwa an, daß es eine in B_ϱ stückweise analytische Funktion ω mit kleinerem Werte des *Dirichlet*schen Integrales gäbe, so sei

$$\underset{B_\varrho}{D}(\omega) = \Delta - c^2;$$

dann wäre

$$\underset{B_{n,\varrho}}{D}(\omega) < \Delta - c^2,$$

also, weil u_n in $B_{n,\varrho}$ Minimalfunktion ist,

$$\Delta_n = \underset{B_{n,\varrho}}{D}(u_n) < \Delta - c^2,$$

was der Gleichung $\lim_{n=\infty} \Delta_n = \Delta$ widerspricht. Die bei der Formulierung der Minimaleigenschaft zugelassenen Funktionen sind diejenigen Funktionen $(u+w)$, für welche $\underset{B_\varrho}{D}(u+w)$ einen endlichen Wert hat und w auf k_ϱ verschwindet. Offenbar hat nun $\underset{B_\varrho}{D}(u+w)$ einen endlichen Wert, wenn $\underset{B_\varrho}{D}(w)$ einen endlichen Wert hat; denn es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right];$$

aber auch umgekehrt folgt in analoger Weise aus der Endlichkeit des Integrales $\underset{B_\varrho}{D}(u+w)$die Endlichkeit des Integrales $\underset{B_\varrho}{D}(w)$, wenn man w in der Form $w = (u+w) - u$ ausdrückt.

Aus dem Bestehen der Minimaleigenschaft schließen wir nach Analogie von S. 218, daß für jede zulässige Variation w die Variationsgleichung besteht

$$(*) \qquad \iint_{B_\varrho} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

welche als mit der Minimaleigenschaft völlig gleichwertig zu betrachten ist. Die Funktion u ist durch ihre Randwerte auf k_ϱ und durch die Minimaleigenschaft vollständig bestimmt. Dies folgt genau ebenso wie oben S. 217, indem man zeigt, daß $(u-u')$ verschwindet, unter u eine angenommene zweite Potentialfunktion von den erwähnten Eigenschaften verstanden.

§ 8. *Einige in der Folge zu benutzende weitere Eigenschaften der Funktion u.*

Die Funktion u_n besitzt folgende Eigenschaften: *Erstens:* Das Integral $\int_{k_\varrho} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} d\sigma$ *hat den Wert Null;* denn die Summe der entsprechenden Integrale über die übrigen Begrenzungslinien von $B_{n,\varrho}$ ist gleich Null, da die normale Ableitung $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}$ längs dieser Linie verschwindet. *Zweitens: Maximum und Minimum* der von der Funktion u_n in $B_{n,\varrho}$ angenommenen Werte werden auf k_ϱ angenommen (s. oben S. 219).

Die genannten beiden Eigenschaften der Funktion u_n übertragen sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $u_1, u_2, \ldots$ ohne weiteres auf die Grenzfunktion u. Es ist von Interesse zu bemerken, daß diese beiden Eigenschaften mit Leichtigkeit aus der Minimaleigenschaft der Funktion u direkt hergeleitet werden können. Zunächst ergibt sich die zweite Eigenschaft unmittelbar nach der S. 219 dargelegten Methode. Die erste Eigenschaft folgt aus der Variationsgleichung (*), wenn man in derselben für w folgende Funktionen wählt*):

Man wähle einen Wert $\varrho_1 > \varrho$ und setze w in dem Kreisring zwischen k_ϱ und k_{ϱ_1} gleich irgendeiner stückweise analytischen Funktion, welche auf k_ϱ verschwindet, auf k_{ϱ_1} Eins wird. In den übrigen Teilen der Fläche B_ϱ setze man w konstant gleich Eins. Das auf der linken Seite der Variationsgleichung (*) stehende Doppelintegral ist dann gleich demselben Doppelintegral, erstreckt nur über den erwähnten Kreisring. Letzteres aber geht durch partielle Integration bei Berücksichtigung der Gleichung $\Delta u = 0$ und der für w geltenden Randbedingung in das Kurvenintegral

*) Vgl. einen analogen *Hilbert*schen Beweis in meiner Note „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode“ S. 68.

$\int_{k_{\varrho_1}} \frac{du}{dv} d\sigma$ über; daher ist

$$\int_{k_{\varrho_1}} \frac{du}{dv} d\sigma = 0 = \int_{k_\varrho} \frac{du}{dv} d\sigma.$$

§ 9. *Übergang zur Funktion U durch gürtelförmige Verschmelzung.*

Wir wollen nunmehr von der *Schwarz-Neumann*schen Methode der gürtelförmigen Verschmelzung explizite Gebrauch machen, um von der Potentialfunktion u, die auf k_ϱ gegebene Randwerte annimmt, zur Potentialfunktion U zu gelangen, die im Punkte O die Unstetigkeit $r^{-1}\cos\varphi$ besitzt. Zu dem Zwecke bemerke ich, daß wir einerseits für die Fläche B_ϱ bei beliebig gegebenen Randwerten auf k_ϱ gelernt haben, die Funktion u zu finden (nach § 6—7) — eine Aufgabe, von der wir sogleich unendlich häufig Gebrauch machen werden — daß andererseits für die von der Kreislinie k_{ϱ_1} $(\varrho_1 > \varrho)$ umschlossene Kreisfläche K_{ϱ_1}, die den Punkt O als Mittelpunkt enthält, die Aufgabe gelöst werden kann, eine Potentialfunktion zu bestimmen, die auf k_{ϱ_1} gegebene Randwerte annimmt und in O die erwähnte Unstetigkeit besitzt. Letztere Aufgabe wird nach Subtraktion der Unstetigkeit unmittelbar durch das *Poisson*sche Integral gelöst.

Wir wenden zuerst die zweite Aufgabe an, indem wir auf k_{ϱ_1} als Randwert überall Null vorschreiben; die gefundene Funktion heiße α_1. Darauf lösen wir für den Bereich B_ϱ die erste Aufgabe indem wir auf k_ϱ die Werte der Funktion α_1 als Randwerte vorschreiben. Die sich ergebende Funktion heiße $u^{(1)}$*). Die Werte der Funktion $u^{(1)}$ auf k_{ϱ_1} wählen wir jetzt, um wieder für K_{ϱ_1} ein Potential α_2 mit der Unstetigkeit und den genannten Randwerten zu konstruieren. Darauf benutzen wir die Werte der Funktion α_2 auf k_ϱ, um in B_ϱ eine Funktion $u^{(2)}$ zu bestimmen usw.

Wir bekommen so eine Folge $\alpha_1, u^{(1)}, \alpha_2, u^{(2)}, \alpha_3, \ldots$ und wollen jetzt beweisen, daß $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in K_{ϱ_1} einschließlich der Begrenzungslinie k_{ϱ_1} gleichmäßig konvergiert gegen eine Grenzfunktion α_∞, daß andererseits die Folge $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$ in B_ϱ einschließlich der Linie k_ϱ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u^{(\infty)}$ konvergiert. Von den Funktionen α_∞ und $u^{(\infty)}$ ist dann auf Grund der für die Näherungsfunktionen α_n und $u^{(n)}$ gestellten Randwertbedingungen klar, daß α_∞ und $u^{(\infty)}$ auf k_ϱ und k_{ϱ_1} übereinstimmende Werte

*) Zum Unterschiede von u_1.

haben, woraus folgt, daß sie auch in dem ganzen Ringgebiete zwischen den genannten Kreisen übereinstimmende Werte haben, daß sie mithin analytische Fortsetzungen voneinander sind, also Ausschnitte einer und derselben Potentialfunktion U, welche auf der ganzen Fläche B erklärt ist und allein im Punkte O eine Unstetigkeit, nämlich die Unstetigkeit $r^{-1}\cos\varphi$ besitzt.

Um den Konvergenzbeweis zu führen, beachten wir zunächst, daß die arithmetischen Mittel*) der von den Funktionen $\alpha_1, u^{(1)}, \alpha_2, u^{(2)}, \ldots$ auf k_ϱ und k_{ϱ_1} angenommenen Werte alle übereinstimmend gleich Null sind. Es ist nämlich zunächst der Mittelwert für α_1 auf k_{ϱ_1} gleich Null, daher auch der Mittelwert für α_1 auf k_ϱ gleich Null, weil das Integral $\int_{k_{\varrho_1}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} d\sigma$ verschwindet, also auch für jedes r zwischen ϱ und ϱ_1 die Gleichung besteht $\int_{k_r} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} r\, d\varphi = 0 = \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{k_r} \alpha_1 d\varphi$. Der erwähnte Mittelwert überträgt sich nun auf $u^{(1)}$ zunächst für die Kreislinie k_ϱ, dann aber auch für die Kreislinie k_{ϱ_1}, weil $\int_{k_\varrho} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \nu} d\sigma$ verschwindet nach § 8. Von $u^{(1)}$ überträgt sich der Mittelwert auf α_2 zunächst für die Kreislinie k_{ϱ_1}, dann aber auch für die Kreislinie k_ϱ, weil $\int_{k_\varrho} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \nu} d\sigma$ verschwindet usw.

Nunmehr betrachten wir die Differenz $(\alpha_n - \alpha_{n+1})$, welche in K_{ϱ_1} regulär ist und in O verschwindet, so daß der Wert

$$\operatorname{Max} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|_{k_\varrho} < q \operatorname{Max} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|_{k_{\varrho_1}} = q \operatorname{Max} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|_{K_{\varrho_1}}$$

gesetzt werden kann, unter q eine Größe <1 verstanden, welche von n unabhängig ist. Nun ist

$$\operatorname{Max} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|_{k_\varrho} = \operatorname{Max} |u^{(n)} - u^{(n+1)}|_{k_\varrho},$$

die Funktion $(u^{(n)} - u^{(n+1)})$ besitzt wegen ihrer Minimaleigenschaft die Eigenschaft

$$\operatorname{Max} |u^{(n)} - u^{(n+1)}|_{B_\varrho} = \operatorname{Max} |u^{(n)} - u^{(n+1)}|_{k_\varrho};$$

insbesondere ist daher

$$\operatorname{Max} |u^{(n)} - u^{(n+1)}|_{k_{\varrho_1}} < \operatorname{Max} |u^{(n)} - u^{(n+1)}|_{k_\varrho}$$

und also

$$(*) \quad \operatorname{Max} |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}|_{K_{\varrho_1}} = \operatorname{Max} |u^{(n)} - u^{(n+1)}|_{k_{\varrho_1}} < q \operatorname{Max} |\alpha_n - \alpha_{n+1}|_{K_{\varrho_1}}.$$

Ebenso folgt jetzt weiter

---

*) S. *Schwarz* und *C. Neumann* a. a. O.

$$(**) \qquad \operatorname{Max} |u^{(n+1)}-u^{(n+2)}|_{B_\varrho} < q \operatorname{Max} |u^{(n)}-u^{(n+1)}|_{B_\varrho}.$$

Aus den Ungleichheiten (*) und (**) entnehmen wir, daß die Reihen

$$\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)+\cdots \quad \text{und} \quad u^{(1)}+(u^{(2)}-u^{(1)})+(u^{(3)}-u^{(2)})+\cdots$$

gleichmäßig konvergieren, und zwar vergleichbar mit der geometrischen Reihe $1+q+q^2+\cdots$. Damit ist die Existenz der Funktion U bewiesen.

§ 10. *Die Hilbertsche charakteristische Minimaleigenschaft der Funktion U.*

Von der Funktion U beweisen wir jetzt, daß sie genau dieselbe Minimaleigenschaft besitzt, welche die Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ besitzen, nämlich die folgende Eigenschaft: Es ist für jede in B_ϱ stückweise analytisch und stetig erklärte Variation w, die auf k_ϱ verschwindet und einen endlichen Wert des *Dirichlet*schen Integrales $D_{B_\varrho}(w)$ liefert,

$$(*) \qquad D_{B_\varrho}(U+w) > D_{B_\varrho}(U)^{*}).$$

Zum Beweise dieser Behauptung lösen wir die in § 6—7 für den Bereich B_ϱ gelöste Aufgabe unter der Voraussetzung, daß die auf k_ϱ gegebenen Randwerte die Werte der Funktion U selbst sind. Die in B_ϱ existierende Lösung heiße $\overline{U}$. $\overline{U}$ besitzt also die Minimaleigenschaft, mithin besitzt auch die Funktion $(\overline{U}-u^{(n)})$ die Minimaleigenschaft. Diese Funktion nimmt folglich in B_ϱ ihr Maximum und Minimum auf k_ϱ an. Da nun auf k_ϱ $\lim_{n=\infty} u^{(n)} = U$, folglich auch gleich $\overline{U}$ ist, so ist im ganzen Gebiete B_ϱ $\lim_{n=\infty} u^{(n)} = \overline{U}$. Ebenso ist $\lim_{n=\infty} u^{(n)} = U$; also ist $U = \overline{U}$. Mithin besitzt U in der Tat die angegebene Minimaleigenschaft (*), welche mit der Variationsgleichung

$$\iint_{B_\varrho} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy = 0^{*})$$

äquivalent ist.

Die gefundene Minimaleigenschaft ist für die Funktion U in Verbindung mit der Unstetigkeit $r^{-1}\cos\varphi+((0))$, unter $((0))$ eine in O verschwindende Potentialfunktion verstanden, vollständig charakteristisch. Denn gäbe es zwei Potentialfunktionen dieser Beschaffenheit, so würde die Differenz derselben in O regulär sein und ebenfalls die Minimaleigenschaft haben, also nach § 5 ein inneres Maximum und Minimum erhalten. Eine andere S. 219 angegebene, auf der Zusammensetzung zweier Variationen

*) *Hilbert:* „Zur Theorie der konformen Abbildung", a. a. O.

beruhende Schlußweise ergibt sofort für die betrachtete Differenz W das Bestehen der Variationsgleichung, mithin auch der Minimaleigenschaft (*) für das ganze Gebiet B; daraus folgt dann, daß $\underset{B}{D}(W)=0$, also $W\equiv 0$ ist*)**).

§ 11. *Die Funktion U als Grenze der Näherungsfunktionen U_n.*

Bilden wir für den Bereich B_m $(m=1,2,\ldots)$ diejenige Potentialfunktion U_m, welche im Punkte O unstetig wird wie $r^{-1}\cos\varphi+((0))$, unter $((0))$ eine in O reguläre und verschwindende Potentialfunktion verstanden, welche ferner in B_m eindeutig ist und auf der ganzen Begrenzung von B_m die normale Ableitung Null besitzt, so ist zu erwarten, daß

$$\lim_{m=\infty} U_m = U.$$

In der Tat habe ich in meiner „vierten Mitteilung“ die Funktion U als Grenze der Funktionen U_m konstruiert. Man kann nun aber die erwähnte Gleichung leicht auch unmittelbar aus der hier entwickelten Methode zur Bestimmung der Funktion U folgern. Zu dem Zwecke bemerke man zunächst, daß man die Funktion U_m analog wie die Funktion U durch explizite Anwendung der Methode der gürtelförmigen Verschmelzung finden kann, indem man genau so verfährt, wie in § 9 angegeben ist. Man wende die Methode jetzt statt auf K_{ϱ_1} und B_ϱ auf die Gebiete K_{ϱ_1} und $B_{m,\varrho}$ an und verstehe unter $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ nunmehr lauter in $B_{m,\varrho}$ erklärte Funktionen, für welche längs der von k_ϱ verschiedenen Begrenzung des Bereichs $B_{m,\varrho}$ die normale Ableitung gleich Null ist. Der Unterscheidung halber seien diese Funktionen mit $u_m^{(1)}, u_m^{(2)}, u_m^{(3)}, \ldots$ bezeichnet. Die oben angegebenen Abschätzungsformeln bleiben dann vollständig bestehen, wobei auch die Größe q ihren alten Wert behält. Daraus ergibt sich, daß man durch

---

*) Die in § 6—7 unter der Voraussetzung analytisch bzw. hinreichend oft differenzierbar gegebener Randwerte auf k_ϱ konstruierte Funktion u kann unter der Voraussetzung der bloßen Stetigkeit der Randwerte entweder durch gürtelförmige Verschmelzung gefunden werden, indem man diese Methode auf die beiden gürtelförmig übereinander greifenden Gebiete B_{ϱ_2} $(\varrho<\varrho_2<\varrho_1)$ und $(B_\varrho - B_{\varrho_1})$ anwendet, oder indem man die stetige Randwertfolge als Grenzfall einer analytischen Randwertfolge behandelt. Der Konvergenzbeweis wird bei beiden Methoden auf die *Maximum-Minimum*-Eigenschaft der Näherungsfunktionen gegründet. Der Nachweis, daß die sich ergebende Grenzfunktion u die mit der Variationsgleichung $\iint_{B_{\varrho_1}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy=0$ äquivalente Minimaleigenschaft $\underset{B_{\varrho_1}}{D}(u+w)>\underset{B_{\varrho_1}}{D}(u)$ besitzt, gelingt ebenso wie für die Funktion U.

**) Der Leser kann unmittelbar S. 238 fortfahren.

Wahl eines hinreichend großen n in B_ϱ bzw. $B_{m,\varrho}$ zugleich

$$|U-u^{(n)}|<\varepsilon \quad \text{und} \quad |U_m-u_m^{(n)}|<\varepsilon$$

machen kann, unter ε eine beliebig klein gegebene positive Größe verstanden. Wir wählen für n jetzt einen bestimmten Wert N, so daß für diesen Wert N die soeben genannten Ungleichheiten gelten, und haben dann nur noch zu zeigen, daß für hinreichend großes m bei Festhaltung von N

$$|u^{(N)}-u_m^{(N)}|<\varepsilon$$

gemacht werden kann. Dies ergibt sich aber sofort daraus, daß $|u^{(1)}-u_m^{(1)}|$ auf Grund des Beweises § 6 in einem beliebig wählbaren, dann aber fest zu denkenden Teilbereiche $B_{n_0,\varrho}$ unendlich klein wird, wenn m ins Unendliche wächst, so daß auch $|\alpha_2-\alpha_{2,m}|$, also auch $|u^{(2)}-u_m^{(2)}|$, also auch $|\alpha_3-\alpha_{3,m}|$, also auch $|u^{(3)}-u_m^{(3)}|, \ldots,$ also auch $|u^{(N)}-u_m^{(N)}|$ unendlich klein wird.

*Bemerkung zum Fall des vollständig analytisch begrenzten Bereiches**). Ist der Bereich B speziell ein endlich-vielblättriger, von endlich vielen analytischen Linienstücken begrenzter Bereich mit endlich vielen inneren Windungspunkten, so habe ich in meiner „vierten Mitteilung" aus der *Minimaleigenschaft***) heraus bewiesen, daß in diesem Falle die zu B gehörende Funktion U, von welcher wir soeben zeigten, daß sie durch die Gleichung $\lim_{n=\infty} U_n = U$ definiert werden kann, übereinstimmt mit derjenigen Funktion, welche die normale Ableitung Null am Rande besitzt und als solche direkt nach den kombinatorischen Methoden gefunden wird. Ich habe a. a. O. weiterhin die Bemerkung gemacht, daß dieser Satz auch direkt mittels der kombinatorischen Methoden bewiesen werden kann. Auf Grund dieser Methoden läßt sich in der Tat die Frage zurückführen auf folgende einfachere Frage: Gegeben ist ein zweifach zusammenhängender Bereich A' mit den Begrenzungslinien L und L'. Innerhalb A' sei eine im folgenden variabel vorzustellende geschlossene Linie L'' gezogen, durch welche A' in zwei zweifach zusammenhängende Stücke zerfällt, deren eines an L

*) In der vorliegenden Abhandlung wird von den Entwicklungen dieses Abschnitts kein weiterer Gebrauch gemacht. Aus der Minimaleigenschaft läßt sich überhaupt mittels des Hilfssatzes auf S. 222 leicht die Stetigkeit der Änderung von U bei stetiger Änderung der Begrenzung und der Windungspunkte von B folgern.

**) Einen anderen auf die Minimaleigenschaft gegründeten Beweis entwickelt Herr *Courant* in seiner Dissertation. Allgemeiner ergibt sich, daß, wenn der Bereich B auch nur *ein* analytisches Begrenzungsstück besitzt, für die Funktion U längs dieses Begrenzungsstücks die normale Ableitung verschwindet; s. meine „vierte Mitteilung". Auch die Methode von Herrn *Courant* liefert diesen Nachweis.

anstoßendes wir mit A'' bezeichnen wollen. Wir konstruieren die beiden Potentialfunktionen w' und w'', deren erste in A' eindeutig ist und auf L' die normale Ableitung Null besitzt, während die zweite in A'' eindeutig ist und auf L'' die normale Ableitung Null besitzt. Auf L mögen w und w' dieselben fest gedachten Werte annehmen. Behauptet wird, daß die Differenz $|w'-w''|$ in jedem nicht an die Linie L' anstoßenden Teilgebiete A''' von A gleichmäßig Null wird, wenn die Linie L'' sich gleichmäßig mit allen Punkten gegen L' bewegt. Es ist nämlich wegen der gestellten Randbedingung die konjugierte Potentialfunktion zu $(w'-w'')$ in A'' eindeutig, auf L ist die normale Ableitung dieser konjugierten Funktion gleich Null und auf L'' sind die Wertänderungen dieser Funktion durch die Wertänderungen der zu w' konjugierten Funktion $\bar{w}'$ bestimmt. Da nun $\bar{w}'$ auf L' konstant ist, so wird demnach die Wertänderung der zu $(w'-w'')$ konjugierten Funktion auf L'' dadurch unendlich klein, daß man L'' mit allen Punkten gleichmäßig gegen L' konvergieren läßt. Diese konjugierte Funktion wird mithin im ganzen Gebiete A'' unendlich klein, weil auf L die Randbedingung „normale Ableitung gleich Null" erfüllt ist und folglich kein Maximum oder Minimum daselbst liegen kann.

Aus dem gleichmäßigen Verschwinden der konjugierten Funktion folgt nun weiter sofort das gleichmäßige Verschwinden der Funktion $(w'-w'')$ selbst in dem festen Teilbereiche A'''.

Der hiermit bewiesene Satz über die Differenz $(w'-w'')$ bleibt in Kraft, wenn die Werte der Funktionen w' und w'' auf L nicht übereinstimmen, sondern um eine Größe differieren, die, während L'' in der angegebenen Weise gleichmäßig gegen L' konvergiert, ihrerseits auf der ganzen Linie L gleichmäßig unendlich klein wird. Wir kommen nämlich auf den Fall übereinstimmender Randwerte sofort zurück, wenn wir zu der Funktion w'' diejenige in A'' erklärte Potentialfunktion hinzufügen, welche auf L'' die normale Ableitung Null besitzt und auf L die Randwerte $(w'-w'')$ annimmt. Die hinzugefügte Funktion wird nun bei dem betrachteten Grenzübergang gleichmäßig im ganzen Gebiete A'' unendlich klein, weil ihr Maximum und Minimum auf L liegt.

§ 12. *Die verschiedenen Methoden zum Beweise der Existenz der Funktion U.*

Bei der Wichtigkeit und interessanten physikalischen Bedeutung der Funktion U wird es angemessen sein, in Kürze auch die anderen

Methoden zur Sprache zu bringen, welche zum Beweise der Existenz dieser Funktion ausgearbeitet worden sind.

Ich nenne hier in erster Linie die bereits oben zitierte *Hilbert*sche Methode*) des *Dirichlet*schen Prinzips. Herr *Hilbert* subtrahiert von der zu bestimmenden Funktion U zunächst eine Funktion Φ, welche etwa in B_ϱ überall verschwindet, im Punkte O von der verlangten Art unstetig wird und sonst in K_ϱ nur hinreichend oft differenzierbar zu sein braucht und längs k_ϱ verschwinden muß. Für die Funktion $d = U - \Phi$, welche in O stetig ist, besteht dann folgende Minimaleigenschaft: Die Funktion d macht das modifizierte *Dirichlet*sche Integral

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta\right)^2\right] dx\, dy$$

zu einem Minimum und ist durch diese Eigenschaft vollständig charakterisiert. Die Funktionen α und β sind Hilfsfunktionen, die der Gleichung $\Delta\Phi = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}$ genügen.

Das Ausgehen von den Potentialfunktionen für die Näherungsflächen B_n bzw. $B_{n,\varrho}$ bildet den Hauptunterschied meiner Methoden gegen die *Hilbert*sche. Die einzelne Näherungsfunktion kann dabei entweder mittels der *Schwarz-Neumann*schen kombinatorischen Methoden gefunden werden oder auch bei Einführung einer passenden Modifikation durch die *Hilbert*sche Methode des *Dirichlet*schen Prinzips, indem man in beiden Fällen von der Rückseite des Näherungsbereichs zweckmäßig Gebrauch macht.

Im engeren Anschluß an Herrn *Hilbert* führe ich in meiner „vierten Mitteilung" (Abschnitt B) einen Existenzbeweis, der sich von dem hier gegebenen dadurch unterscheidet, daß ich direkt mit den Näherungsfunktionen $U_1 - \Phi, U_2 - \Phi, U_3 - \Phi, \ldots$ und der erwähnten modifizierten Minimaleigenschaft

*) *Hilbert* a. a. O. und *Courant* a. a. O. Bezüglich der Bestimmung der Funktionen α und β verweise ich auch auf meine „vierte Mitteilung", insbesondere Abschnitt B.

Wie Herr *Weyl* mir mitteilte, läßt sich die *Hilbert*sche Methode des *Dirichlet*schen Prinzips, wie dieselbe von Herrn *Hilbert* in seiner Festschrift (1901) entwickelt wird, nicht unerheblich vereinfachen durch Zuhilfenahme von Gedankenelementen bei *W. Ritz* und *B. Levi*. Während Herr *Weyl* mit *Hilbert* auf dem Boden der allgemeinsten stetigen Näherungsfunktionen stehen bleibt, ist Herrn *Courant* (vgl. die Note „Zur Begründung des *Dirichlet*schen Prinzipes" a. a. O.) dadurch eine Vereinfachung und Ausdehnung der Methode des *Dirichlet*schen Prinzips gelungen, daß er die Näherungsfunktionen von vornherein in geeigneter Weise stückweise als Potentialfunktionen wählt.

operiere, ohne von der Methode der gürtelförmigen Verschmelzung explizite Gebrauch zu machen*).

Anders verfahre ich in Abschnitt *A* meiner „vierten Mitteilung". Ich zeige, daß sämtliche Näherungsfunktionen U_n, absolut genommen, in $B_{n,\varrho}$ unterhalb einer endlichen von n unabhängigen Schranke bleiben, und schließe daraus mittels eines ganz *allgemeinen Konvergenzprinzips***), daß man aus der Folge $U_1, U_2, U_3, \ldots$ eine gleichmäßig konvergente Folge herausgreifen kann. Für die Grenzfunktion U ergibt sich dann die charakteristische Minimaleigenschaft in der ursprünglichen Gestalt (§ 10 dieser Abhandlung). Da diese Minimaleigenschaft für U völlig charakteristisch ist, folgt nachträglich, daß die Folge $U_1, U_2, U_3, \ldots$ selbst gleichmäßig gegen U konvergiert. Für den Nachweis, daß die Funktionen U_n in $B_{n,\varrho}$ alle unterhalb einer von n unabhängigen Schranke bleiben, habe ich mehrere Methoden angegeben, die erste Methode in einer Comptes-Rendus-Note***), wo ich sage, daß dieser Satz aus der alternierenden Methode folgt. In der Tat haben wir oben § 9 bei der Anwendung der Methode der gürtelförmigen Verschmelzung eine für alle U_n gleichmäßig geltende Abschätzung gefunden. Diese erste Methode läßt sich auch unabhängig von der expliziten Anwendung des alternierenden Verfahrens darstellen; vgl. Abschnitt A meiner „vierten Mitteilung". Eine weitere Methode, um die Existenz der in Rede stehenden oberen Schranke für die Funktionen U_n zu beweisen, habe ich S. 338 meiner „vierten Mitteilung" angegeben. Diese Methode stützt sich auf den Hilfssatz S. 222 vorliegender Abhandlung, auf Grund dessen von der Endlichkeit des *Dirichlet*schen Integrals einer Potentialfunktion auf die Endlichkeit der Funktion selbst geschlossen wird. Schließlich will ich erwähnen, daß man den in vorliegender Abhandlung durchgeführten Grenzübergang $\lim_{n=\infty} u_n = u$ (§ 6) ebenfalls mittels des erwähnten allgemeinen Konvergenzprinzips bewerkstelligen kann. In der Tat liegen alle Funktionen u_n zwischen zwei endlichen Schranken, nämlich dem Maximum und Minimum der auf k_ϱ vorgeschriebenen Werte.

Es ist bemerkenswert, daß man auch die Existenz der in Rede stehen-

*) Der von mir in dem erwähnten Abschnitte B meiner 4. Mitt. geführte Konvergenzbeweis ist auch von Herrn *Courant* (a. a. O.) gefunden worden.

**) Dieses Prinzip habe ich auch in der Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II" (Math. Ann. 1910), S. 71 ff. zur Darstellung gebracht.

***) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 1. juin 1909. (Vgl. S. 195, Anm.)

den von n unabhängigen Schranke für die Funktion U_n mittels des erwähnten allgemeinen Konvergenzprinzips folgendermaßen schließen kann.

Die Funktion U_n hat in $B_{n,\varrho}$ ihr Maximum und Minimum auf k_ϱ. Das arithmetische Mittel der von U_n auf k_ϱ angenommenen Werte ist, wenn U_n in O die Entwicklung $U_n = r^{-1}\cos\varphi + \psi_n$ hat (unter ψ_n eine in O verschwindende Potentialfunktion verstanden), gleich Null, so daß U_n auf k_ϱ positive und negative Werte annimmt. Ist M_n das Maximum des absoluten Betrages der Funktion U_n auf k_ϱ, mithin für das ganze Gebiet $B_{n,\varrho}$, so ist zu beweisen, daß M_n unterhalb einer von n unabhängigen Schranke bleibt. In der Tat nehmen wir an, es wäre dies nicht der Fall. Dann würde es eine Folge ganzer positiver Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ geben, so daß

$$\lim_{\nu=\infty} M_{n_\nu} = \infty.$$

Demnach würden die Funktionen $\dfrac{U_{n_\nu}}{M_{n_\nu}}$ auf k_ϱ alle, absolut genommen, kleiner als 1 sein, mithin auch im ganzen Gebiete $B_{n_\nu,\varrho}$. Nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip könnte man daher eine Folge ganzer positiver Zahlen $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$ herausgreifen, so daß die Funktionenfolge

$$\frac{U_{n_{\nu_1}}}{M_{n_{\nu_1}}}, \quad \frac{U_{n_{\nu_2}}}{M_{n_{\nu_2}}}, \cdots$$

im Innern von B gleichmäßig konvergiert und ein bestimmtes Grenzpotential liefert. Die gleichmäßige Konvergenz erstreckt sich dann auch in das Innere des Kreises k_ϱ, weil jedenfalls auf k_{ϱ_1} $(\varrho_1 > \varrho)$ gleichmäßige Konvergenz stattfindet und somit die Folge $\dfrac{\psi_{n_{\nu_1}}}{M_{n_{\nu_1}}}, \dfrac{\psi_{n_{\nu_2}}}{M_{n_{\nu_2}}}, \ldots$ in K_{ϱ_1} gleichmäßig konvergiert. Nun wird $\dfrac{r^{-1}\cos\varphi}{M_{n_{\nu_a}}}$ für $\lim \alpha = \infty$ unendlich klein, also wird die Grenzfunktion $\lim\limits_{a=\infty} \dfrac{U_{n_{\nu_a}}}{M_{n_{\nu_a}}}$ eine innerhalb K_{ϱ_1} reguläre Funktion, die in O verschwindet. Für diese Grenzfunktion ist ferner auf k_ϱ das Maximum ihres absoluten Betrages gleich Eins und außerdem ist dieser Maximalwert auch das Maximum des absoluten Betrages für die ganze Fläche B_ϱ. Damit ist ein Widerspruch mit dem Satze hergeleitet, daß eine Potentialfunktion an einem regulären Punkte weder ein Maximum noch ein Minimum hat.

Die Größen M_n bleiben also alle unterhalb einer endlichen Schranke. Aus der Folge $U_1, U_2, \ldots$ kann mithin eine in B_ϱ, also auch auf k_{ϱ_1}, also auch in K_{ϱ_1}, also überhaupt in B gleichmäßig konvergente Folge ausgewählt werden, welche als Grenzfunktion die gesuchte Funktion U liefert.

§ 13. *Konforme Abbildung des Bereichs B durch die Funktion* $U+iV$ *auf einen schlichten Schlitzbereich. Die Inhaltsbedingung.*

Wir machen jetzt die Annahme, daß der Bereich B *schlichtartig**) ist, also durch jeden geschlossenen inneren Rückkehrschnitt in getrennte Stücke zerfällt. Unter dieser Voraussetzung sind auch die Näherungsflächen $B_1, B_2, \ldots$ schlichtartig. Die zum Bereiche B_n gehörende Näherungsfunktion U_n hat als konjugiertes Potential eine Funktion V_n, welche längs jeder einzelnen Begrenzungslinie des Bereichs B_n einen konstanten Wert hat. Längs einer solchen Begrenzungslinie erstreckt besitzt nämlich das Integral $\int \frac{\partial U_n}{\partial \nu} d\sigma$ nur verschwindende Integralelemente. Da somit die Funktion U_n+iV_n längs jeder einzelnen Begrenzungslinie von B_n eindeutig ist, ist wegen der Schlichtartigkeit der Fläche B_n die Funktion U_n+iV_n überhaupt in B_n eindeutig. Im Punkte $O\,(x=x_0, y=y_0)$ wird diese Funktion unendlich wie $\frac{1}{z-z_0}+((0))$, wenn $z_0=x_0+iy_0$, $z=x+iy$ gesetzt wird. Mit $((0))$ wird dabei eine in O reguläre analytische Funktion verstanden, die im Punkte O selbst verschwindet.

Die Funktion U_n+iV_n vermittelt eine bestimmte umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B_n auf ein Flächenstück, welches den unendlich fernen Punkt jedenfalls nur einfach bedeckt. Ist a ein komplexer Wert, welcher von der Funktion U_n+iV_n auf keiner der Begrenzungslinien angenommen wird, so wird die Anzahl der Stellen innerhalb B_n, an welchen U_n+iV_n den Wert a annimmt, durch die Gesamtänderung der Funktion $\log(U_n+iV_n-a)$ längs sämtlicher Begrenzungs-

---

*) Herr *Hilbert* stellt auch für den Fall, daß die Fläche B nicht schlichtartig ist, in seiner Note „Zur Theorie der konformen Abbildung“ ein Abbildungstheorem auf. Dieses Theorem fällt jedoch aus dem Rahmen der Uniformisierungstheorie als solcher heraus und mag daher hier unerörtert bleiben.

Bezüglich des Schlitztheorems für schlichtartige Bereiche will ich noch folgendes erwähnen: Die durch das Schlitztheorem gewährleistete Normierung des allgemeinsten schlichten Bereichs ist noch nicht die vom Standpunkte der allgemeinen Abbildungs- und Uniformisierungstheorie anzustrebende Normierung. Diese wird vielmehr durch das von mir als „*allgemeines Kreisnormierungsprinzip*“ bezeichnete Theorem geliefert, bei welchem der Normalbereich ein von lauter Vollkreisen bzw. Punkten begrenzter Bereich ist. Es ist zu erwarten, daß auch für den Beweis dieses Theorems der *Hilbert*sche Gedanke der Zurückführung auf ein Variationsproblem eine entscheidende Bedeutung gewinnen wird.

linien des Bereichs $B_{n,\varrho}$ gemessen. Den Radius ϱ hat man sich dabei so klein gewählt zu denken, daß jedenfalls innerhalb k_ϱ der Wert a nicht mehr angenommen wird. Die gesuchte vollständige Änderung ist nun längs jeder einzelnen Begrenzungslinie von B_n offenbar gleich Null, weil auf einer solchen Linie die Größe U_n+iV_n sich längs einer endlichen, den Punkt a nicht treffenden geradlinigen Strecke bewegt. Längs k_ϱ ist jedoch die Änderung gleich $2\pi i$ wegen der Unstetigkeit im Punkte O. Der Wert a wird somit genau einmal angenommen.

Die Funktion U_n+iV_n vermittelt demzufolge eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B_n auf einen schlichten, d. i. einblättrigen Bereich, der den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält und von endlich vielen zur Achse des Reellen parallelen endlichen geradlinigen Strecken (*Schlitzen*) begrenzt wird.

Aus der Eindeutigkeit der Funktion U_n+iV_n folgt sofort wegen $U=\lim_{n=\infty} U_n$ die Eindeutigkeit der Funktion $U+iV$*). Die Funktion $U+iV$ kann nun ebenso wie U_n+iV_n nicht an zwei verschiedenen Stellen der Fläche B einen und denselben Wert annehmen. Wäre dies nämlich der Fall, so könnten wir auf B eine, die beiden Punkte umschließende, geschlossene Linie l ziehen, welche auf B ein einfach zusammenhängendes, den Punkt O nicht enthaltendes inneres Stück abgrenzt. Ist nun a der von der Funktion $U+iV$ in den betrachteten zwei Punkten zugleich angenommene Wert, so wird die vollständige Änderung der Größe $\log(U+iV-a)$ längs der Linie l mindestens den Wert $2\cdot 2\pi i$ haben; daraus würde aber wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen U_n+iV_n gegen $U+iV$ folgen, daß bei hinreichend großem n auch die vollständige Änderung der Größe $\log(U_n+iV_n-a)$ längs l mindestens $2\cdot 2\pi i$ wird, was im Widerspruch mit der bereits erkannten Schlichtheit der durch U_n+iV_n vermittelten konformen Abbildung steht.

Die Funktion $U+iV$ leistet also, wie nunmehr feststeht, eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B auf einen schlichten Bereich S.

---

*) Aus der gleichmäßigen Konvergenz der U_n ergibt sich die der V_n (wenn man dieselben etwa so normiert, daß das konstante Glied in der Entwicklung an der Stelle O verschwindet) aus dem Satze, daß mit dem gleichmäßigen Verschwinden einer Potentialfunktion in einem Gebiete zugleich auch die Schwankung der konjugierten Potentialfunktion verschwindet.

Es ist von besonderem Interesse und namentlich vom Standpunkte der *Hilbert*schen Methode des *Dirichlet*schen Prinzips wichtig, daß der soeben gefundene Satz auch als eine *unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft* erkannt werden kann*), nämlich folgendermaßen.

Wir gehen aus von der Funktion U, indem wir von derselben nur als bekannt voraussetzen, daß sie eine eindeutige auf B erklärte Potentialfunktion ist, die in O unstetig wird wie $r^{-1}\cos\varphi$ und die mit der Variationsgleichung

$$\iint_{B_\varrho}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

gleichbedeutende Minimaleigenschaft

$$D_{B_\varrho}(U+w)>D_{B_\varrho}(U)$$

besitzt.

Wir beweisen zunächst, daß die zu U konjugierte Potentialfunktion V, welche in O unstetig wird wie $-r^{-1}\sin\varphi$, ebenfalls eine *eindeutige* Funktion ist. Dieser Satz versteht sich von selbst, wenn B einfach zusammenhängend ist. Ist B mehrfach zusammenhängend, endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängend, aber wohlgemerkt schlichtartig, so handelt es sich darum zu zeigen, daß das Kurvenintegral $\int\frac{\partial U}{\partial \nu}d\sigma$, erstreckt über eine einfach geschlossene, den Punkt O nicht treffende Linie L auf B stets verschwindet. Nach Herrn *Hilbert* kann man diese Behauptung aus dem Bestehen der Variationsgleichung folgendermaßen schließen. Die Fläche B wird durch L in zwei Stücke zerlegt, in deren einem, den Punkt O nicht enthaltenden, w konstant gleich 1 gesetzt wird, während in dem andern Teile w irgendwie von 1 gegen 0 abfallend gewählt wird, so daß w in der Umgebung des Punktes O identisch 0 ist (vgl. einen analogen Beweis S. 226).

Um nun weiter zu beweisen, daß $U+iV$ eine konforme Abbildung des Bereichs B auf einen schlichten Bereich leistet, nehmen wir an, daß diese Funktion an zwei verschiedenen Stellen P_1 und P_2 der Fläche B einen und denselben Wert annimmt. Wir dürfen P_1 und P_2, welche selbstverständlich beide von dem Punkte O verschieden sind, so annehmen, daß beide gewöhnliche Punkte der Fläche B sind, an welchen auch die Ab-

*) Nach *Hilbert* ist ein derartiger Beweis als das Ideal zu betrachten.

leitung $\frac{d(U+iV)}{dz}$ nicht verschwindet. Es sei U_1+iV_1 der von der Funktion $U+iV$ in P_1 und P_2 angenommene Wert. Dann denken wir uns alle Linien $U=U_1$ und $V=V_1$ auf B konstruiert, wodurch die Fläche B in eine gewisse Anzahl von getrennten Gebietsteilen zerlegt wird. In der Nachbarschaft der Punkte O, P_1, P_2 ist der Verlauf der soeben definierten Linien durch die Bemerkung zu charakterisieren, daß in jedem der genannten Punkte eine und nur eine Linie $U=U_1$ von einer und nur einer Linie $V=V_1$ unter einem rechten Winkel geschnitten wird. Die an jedem der Punkte so entstehenden vier Gebietszipfel gehören stets vier verschiedenen Gebieten der definierten Einteilung an. Denn es sind für die genannten Gebietszipfel die Ungleichheiten: $U>U_1, V>V_1$; $U<U_1, V>V_1$; $U<U_1$, $V<V_1$; $U>U_1, V<V_1$ charakteristisch. Andererseits sind je zwei entsprechende Gebietszipfel bei O, P_1, P_2, d. s. Gebietszipfel, für welche dieselben Ungleichheiten gelten, Teile eines und desselben Gebiets, da andernfalls ein nur durch Linien $U=U_1$ und $V=V_1$ abgegrenztes Teilgebiet von B existieren würde, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung des Punktes O enthält. Ein solches Gebiet kann nun aber aus folgenden Gründen nicht existieren.

Es sei etwa β ein derartiges Gebiet; dann bilden wir für dieses Gebiet folgende Variation

$$w=(U-U_1)\,\varphi\,(V;V_1),$$

indem wir unter $\varphi\,(V;V_1)$ folgende Funktion verstehen:

$$\varphi(V;V_1)=|V-V_1| \quad \text{für} \quad |V-V_1|\leqq 1,$$
$$\varphi(V;V_1)=1 \qquad\quad \text{für} \quad |V-V_1|>1.$$

Zunächst bemerken wir, daß w in der Tat auf der ganzen Begrenzung von β, soweit sie innerhalb B verläuft, verschwindet. Ferner bemerken wir sofort, daß für unsere Variation w das *Dirichlet*sche Integral $D_\beta(w)$ einen endlichen Wert hat. Es ist nämlich bei Berücksichtigung der Invarianz des *Dirichlet*schen Integrals gegenüber konformen Abbildungen der Ebene der unabhängigen Variablen

$$\iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial U}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial V}\right)^2\right]dU\,dV$$
$$<\iint [(\varphi(V;V_1))^2+(U-U_1)^2]\,dU\,dV$$
$$<\iint (1+M^2)\,dU\,dV=(1+M^2)\,D_\beta(U).$$

Hierbei ist mit M die obere Grenze der von $|U-U_1|$ in β angenommenen Werte bezeichnet, eine Größe, welche darum endlich ist, weil nach S. 219 aus der Minimaleigenschaft folgt, daß in B_ϱ die Funktion U ihr Maximum und Minimum auf k_ϱ annimmt. Für die Variation w muß nun die Variationsgleichung bestehen, welche wir ebenfalls auf U und V transformieren, wobei sie der Form nach invariant bleibt. Diese Gleichung geht dadurch über in

$$\iint_{B_\varrho} \frac{\partial w}{\partial U}\, dU\, dV = 0.$$

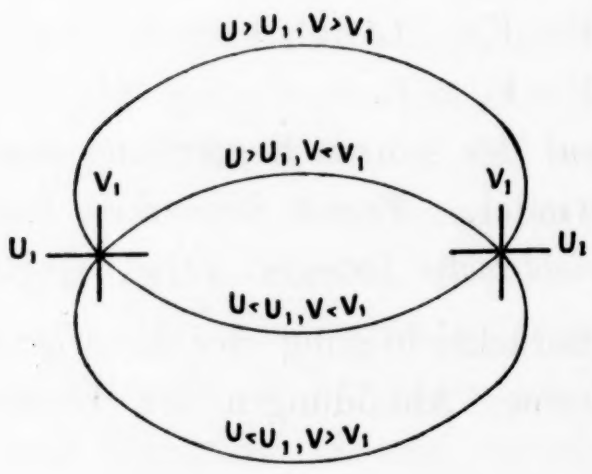
In unserem Falle müßte also sein

$$\iint_{\beta} \frac{\partial w}{\partial U}\, dU\, dV = 0.$$

Nun ist aber $\frac{\partial w}{\partial U} = \varphi(V; V_1) > 0$; demnach ergibt sich

$$\iint_{\beta} \frac{\partial w}{\partial U}\, dU\, dV > 0.$$

Nachdem festgestellt ist, daß entsprechende Gebietszipfel bei P_1 und P_2, d. s. solche, für welche dieselben Ungleichheiten erfüllt sind, Teile eines und desselben zusammenhängenden Teilgebietes von B sein müssen, in welchem überall dieselben Ungleichheiten erfüllt sind, können wir von P_1 nach P_2 vier sich gegenseitig nicht treffende Linien ziehen, längs deren jeder einzelnen ein bestimmtes Paar der oben erwähnten Ungleichheiten zutrifft. Aus der Konformität der durch die Funktion $U+iV$ vermittelten Abbildung ergibt sich unmittelbar, daß bei Umkreisung der Punkte P_1 und P_2 in positivem Sinne die entsprechenden Zipfel beide Male in derselben Reihenfolge angetroffen werden. Demnach müßten auch die genannten vier Verbindungslinien beide Male in derselben Reihenfolge getroffen werden. Das ist jedoch ein topologischer Widerspruch gegen die Schlichtartigkeit der Fläche B. Denkt man sich nämlich auf einer schlichten Fläche, welche für die hier zu machende Bemerkung mit einer schlichtartigen Fläche als völlig äquivalent gelten darf, irgend zwei Punkte durch vier sich nicht treffende Linien verbunden, so werden sie bei positiver Umkreisung der Punkte P_1 und P_2 in umgekehrter Reihenfolge angetroffen; vgl. die Figur.



Hiermit ist die Annahme der Existenz zweier Punkte P_1 und P_2, an welchen die Funktion $U+iV$ einen und denselben Wert annimmt, auf einen Widerspruch geführt*).

Nachdem festgestellt ist, daß die Funktion $U+iV$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen schlichten Bereich S vermittelt, welcher den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält, soll jetzt gezeigt werden, daß die geschlossenen Begrenzungslinien des Bereichs S (vgl. die Begriffsbestimmungen S. 209) geradlinige Strecken parallel der Achse des Reellen sind, wobei die einzelne Strecke sich auch auf einen Punkt reduzieren kann.

Um diesen Nachweis zu führen, gehen wir von der Annahme des Gegenteils aus**). Wir denken uns also, daß es eine Begrenzungslinie des Bereichs S gäbe, für welche V nicht konstant ist. Sind V_1 und V_2 irgend zwei verschiedene der auf dieser Linie in der UV-Ebene angenommenen V-Werte, so erhalten wir, indem wir die geraden Linien $V=V_1$ und $V=V_2$ konstruieren und dazu eine geradlinige Verbindungsstrecke $U=U_1$ zwischen diesen beiden Geraden ziehen, welch letztere wir uns hinreichend nahe dem unendlich fernen Punkte denken, offenbar ein Gebiet β, welches ganz im Endlichen liegt und außer von Begrenzungslinien des Bereichs S nur von der Linie $U=U_1$ und Linienstücken $V=V_1$ oder $V=V_2$ begrenzt wird. Für dieses Gebiet β bilden wir die Variation

$$w=(U-U_1)(V-V_1)(V-V_2).$$

Das *Dirichlet*sche Integral für diese Variation***), nämlich $\iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial U}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial V}\right)^2\right] dU\,dV$ hat offenbar einen endlichen Wert, und es ist die Variationsgleichung $\iint_\beta \frac{\partial w}{\partial U}\,dU\,dV=0$ für unser w nicht erfüllt, weil $\frac{\partial w}{\partial U}$ im ganzen Gebiete β sein Vorzeichen nicht ändert.

Höchst bemerkenswert ist nun noch eine weitere Eigenschaft des Bereichs S, nämlich die folgende: Es ist möglich die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit des Bereichs S in endlich viele ganz innerhalb S ver-

*) Vgl. meine Note „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode“ 1910, woselbst die hier in möglichster Beschränkung entwickelte Betrachtungsweise weiter ausgestaltet ist.

**) Vgl. meine „vierte Mitteilung“ Abschnitt D.

***) Wir betrachten jetzt die UV-Ebene als Ebene der unabhängigen Variablen.

laufende geschlossene Linien einzuschließen, welche einen beliebig kleinen Gesamtflächeninhalt haben. Ich sage dafür auch: *die Begrenzungsmannigfaltigkeit des Bereichs S hat den Inhalt Null.*

Diese Behauptung folgt aus der oben S. 225 bewiesenen Gleichung*)

$$\underset{B_\varrho}{D}(U)=\int_{k_\varrho} U\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma;$$

wir schreiben diese Gleichung

$$(*)\qquad \int_{k_\varrho} U\,dV=\iint_{B_\varrho} dU\,dV.$$

Der Linie k_ϱ entspricht in der S-Ebene eine einfach geschlossene Linie s_ϱ, welche einen bestimmten Flächeninhalt, nämlich $\int_{k_\varrho} U\,dV$ umschließt. Andererseits entspricht der Fläche B_ϱ bei der konformen Abbildung ein Gebiet S_ϱ, welches nach außen von s_ϱ begrenzt wird, nach innen von den Begrenzungslinien des Bereichs S. Die Fläche S_ϱ hat, wenn man nur ihre *inneren* Punkte in Betracht zieht, einen bestimmten Flächeninhalt, welcher durch das Integral $\iint_{B_\varrho} dU\,dV$ dargestellt wird. Die Gleichung (*) besagt die Übereinstimmung der Werte der genannten beiden Flächeninhalte.

Dem Näherungsbereich B_n entspricht ein Näherungsbereich S_n des Bereichs S. Auf Grund des gefundenen Resultats reduziert sich der von den inneren Begrenzungslinien dieses Näherungsbereichs umschlossene Gesamtflächeninhalt auf Null, wenn n unendlich groß wird**).

§ 14. *Andere Methoden zum Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes für schlichtartige, insbesondere für einfach zusammenhängende Bereiche.*

Ich gebe hier in Kürze einen Überblick über die sonstigen Methoden, deren man sich zum Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes bedienen kann.

Die Entwickelung in der von uns zu betrachtenden Richtung setzt ein mit der Abhandlung des Herrn *Poincaré* von 1883 (s. S. 195, Anm.). In dieser Abhandlung gelingt es *Poincaré*, den allgemeinen Abbildungssatz für ein-

---

*) Dabei ist U für u (S. 229) gesetzt. In der Tat löst die Funktion U für den Bereich B_ϱ dieselbe Aufgabe wie u, wenn auf k_ϱ als Randwerte die Werte von U selbst gegeben sind.

**) Dieses merkwürdige Resultat kann auch als eine unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft der Funktion U gefunden werden. Vgl. meine „vierte Mitteilung" und „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode".

fach zusammenhängende Bereiche unter der Restriktion zu beweisen, daß der betreffende Bereich nach Art einer *Riemann*schen Fläche über der Ebene ausgebreitet ist und mindestens drei voneinander verschiedene Punkte der Ebene unbedeckt läßt. Der gegebene abzubildende Bereich B wird durch Näherungsbereiche $B_1 < B_2 < B_3 < \cdots$ approximiert. Zu diesen Näherungsbereichen gehören *Green*sche Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$, die auf der Begrenzung verschwinden und in einem Punkte O logarithmisch unendlich werden. Es ergibt sich $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots$, und der Konvergenzbeweis gründet sich dann wesentlich auf die Existenz eines als Majorante dienenden Potentials, welches nachweislich größer ist als alle Funktionen u_n. Um diese Majorante anzugeben, benutzt Herr *Poincaré* die *elliptische Modulfunktion.* Hierin liegt auch der Grund, weswegen sich *Poincaré* zu der angegebenen Restriktion gezwungen sieht.

Ein allgemeiner Beweis des Abbildungssatzes für einfach zusammenhängende Bereiche wurde erst im Jahre 1907 gleichzeitig von Herrn *Poincaré* (Acta math., **31**) und dem Verfasser (Göttinger Nachrichten) veröffentlicht und zwar von jedem der genannten Autoren nach einer eigenen Methode. Bei diesem allgemeinen Abbildungssatze kam dann naturgemäß die *Alternative* zwischen dem Falle der endlichen Kreisfläche und dem der ganzen Ebene zum Vorschein.

u_n habe die vorher angegebene Bedeutung, und es fange die Entwickelung der Funktion u_n an der Stelle O an mit

$$u_n = \log \frac{1}{r} + c_n + ((0)),$$

unter c_n das konstante Glied verstanden; dann unterscheide ich a. a. O. den Fall $\lim_{n=\infty} c_n = c =$ endliche Größe und den Fall $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$. Im ersten Falle schließe ich mit Hilfe des *Harnack*schen Satzes über positive Potentiale auf die gleichmäßige Konvergenz der Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ gegen eine Grenzfunktion u. Die Funktion $e^{-(u+iv)}$ vermittelt dann eine konforme Abbildung des Bereichs B auf die schlichte Fläche des Einheitskreises. Ist hingegen $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$, so betrachte ich die neue Reihe von Funktionen $U_1, U_2, \ldots$, von welchen U_n für B_n definiert ist wie u_n, nur mit dem Unterschiede, daß die Unstetigkeit $\log \frac{1}{r}$ durch die Unstetigkeit $r^{-1} \cos \varphi$ ersetzt ist. Mittels eines besonderen Hilfssatzes gelingt nunmehr in einfacher Weise der Konvergenzbeweis für die Folge $U_1, U_2, \ldots$ gegen eine Grenzfunktion U.

Die Funktion $\frac{1}{U+iV}$ vermittelt eine konforme Abbildung auf die Fläche der ganzen Ebene. In einer modifizierten Gestalt, wobei insbesondere von dem *Harnack*schen Satze kein Gebrauch mehr gemacht wird, habe ich den soeben geschilderten Beweis in Math. Ann. 67 Abschnitt E, III entwickelt.

Wesentlich anders verfährt Herr *Poincaré* in seiner genannten Arbeit. Sein Beweis stimmt in der Grundanlage überein mit einem von mir kurze Zeit nach dem Erscheinen der *Poincaré*schen Abhandlung veröffentlichten zweiten Beweise (Gött. Nachr., 2. Mitteilung, 1907).

Aus der abzubildenden Fläche B denke man sich zunächst eine kleine Kreisfläche K ausgeschnitten. Für den übrigbleibenden zweifach zusammenhängenden Bereich B_1 wird nun die in einem Punkte O logarithmisch unendlich werdende *Green*sche Funktion $u(B_1, O)$ konstruiert, die auf der erwähnten Kreislinie verschwindet. Von hier aus gelangt man entweder nach Herrn *Poincaré* oder einfacher nach meiner zweiten Mitteilung in folgender Weise zu einer Abbildung des Bereiches B_1 auf die Fläche eines schlichten Kreisrings. Zur Fläche B_1 gehört eine einfach zusammenhängende leicht erhältliche Überlagerungsfläche $B_1^{(\infty)}$, welche man ihrerseits nach der oben geschilderten Methode der Funktionen u_n sofort auf die Fläche eines schlichten Kreises abbilden kann, indem man die Funktion $u(B_1, O)$ für die Fläche $B_1^{(\infty)}$ als Majorante benutzt. Durch Einführung einer geeigneten Exponentialfunktion bzw. Potenz gelangt man von der gefundenen Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf die Fläche eines Kreises zur gesuchten Abbildung der Fläche B_1 selbst auf die Fläche eines Kreisrings.

Die konforme Abbildung der Fläche B auf die Fläche eines Kreises bzw. der ganzen Ebene erfordert schließlich nur noch die Anwendung der *Schwarz-Neumann*schen Methode der gürtelförmigen Verschmelzung. Für den *Poincaré*schen Beweis ist gegenüber dem geschilderten meinigen charakteristisch, daß von der Überlagerungsfläche $B_1^{(\infty)}$ kein Gebrauch gemacht, sondern direkt mit der Funktion $u(B_1, O)$ operiert wird, bzw. einer anderen Potentialfunktion, welche das Analogon der zu einer gewöhnlichen zweifach zusammenhängenden Fläche gehörenden eindeutigen, auf der einen Begrenzungslinie verschwindenden, auf der anderen gleich Eins werdenden Potentialfunktion ist*).

*) An die *Poincaré*sche Abhandlung bzw. meine „2. Mitt." knüpft Herr *Johansson* in Acta soc. Fenn. 1910, Nr. 2 an, an meine „1. Mitt." ebenda, Nr. 1.

Auf Grund der im Vorstehenden erwähnten Resultate gelingt nun leicht unter Benutzung der Methode der gürtelförmigen Verschmelzung der Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes auch für *endlich-vielfach* zusammenhängende schlichtartige Bereiche (3. Mitteilung 1908). Jedoch für den Fall unendlich hohen Zusammenhanges mußte der Beweis nach anderen Methoden geführt werden. Ich habe diesen allgemeinen Satz zum ersten Male in meiner „dritten Mitteilung" 1908 aufgestellt (s. auch meinen Römischen Vortrag) und bewiesen, wobei ich wesentlich von dem oben in § 4 erwähnten allgemeinen *Konvergenzprinzip* Gebrauch mache. Auf die Möglichkeit, den schlichten Bereich als einen beispielsweise von lauter geradlinigen Strecken begrenzten Bereich zu normieren, ging ich in dieser Abhandlung nicht näher ein, weil ich damals zwar wohl im Besitze der Existenz der betreffenden Abbildungsfunktion war, aber noch nicht im Besitze der *Hilbert*schen Minimaleigenschaft, auf Grund deren der vollständige Beweis dieser Normierung schließlich gelungen ist.

Die weiteren Untersuchungen knüpfen an den Vortrag an, welchen Herr *Hilbert* im April 1909 zur Zeit der Anwesenheit des Herrn *Poincaré* in Göttingen in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft gehalten hat („Zur Theorie der konformen Abbildung", Gött. Nachr. a. a. O.). Auf das *Hilbert*sche Minimalprinzip gestützt bzw. im Zusammenhange mit diesem Minimalprinzip ergaben sich einerseits die im § 12 erwähnten Methoden zum Existenzbeweise des *Strömungspotentials* U auf der allgemeinsten *Riemann*schen Fläche B, andererseits aber auch der Beweis für die Möglichkeit der Normierung des allgemeinsten unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichten bzw. schlichtartigen Bereichs B als schlichten *Schlitzbereich.* Zwei Möglichkeiten der Beweisführung sind hier zu nennen. Entweder man stützt sich namentlich bezüglich des Beweises, daß die Funktion $U+iV$ eine Abbildung auf einen zunächst *schlichten* Bereich leistet, auf die Darstellung der Funktion U als Grenze der Näherungsfunktionen $U_1, U_2, \ldots$, wie ich dies in meiner „vierten Mitteilung" getan habe und wie auch Herr *Courant* in seiner Dissertation verfährt, indem er sich übrigens prinzipiell auf den Standpunkt stellt, daß auch die betreffenden Näherungsfunktionen nach *Hilbert*s Methode des *Dirichlet*schen Prinzips gefunden werden. Oder aber man vermeidet zu dem betreffenden Nachweise die erwähnte Darstellung durch die Näherungsfunktionen und gründet

den Beweis unmittelbar auf die Minimaleigenschaft der Funktion U, wie ich dies in der Note „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode" und auch in dieser Abhandlung getan habe. Vom Standpunkte der Methode des *Dirichlet*schen Prinzips ist dieser letztere Weg nach *Hilbert* als das Ideal zu bezeichnen.

Was nun den Nachweis des Schlitzcharakters aller Begrenzungslinien des Bereichs S anbetrifft, auf welchen der Bereich B durch $U+iV$ abgebildet wird, so habe ich in meiner „vierten Mitteilung" diesen Nachweis bereits als eine *unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft* dargetan. Der wesentliche Gedanke ist dabei der: es wird die Annahme des Gegenteils benutzt, um ein Teilgebiet von B und für dieses Teilgebiet eine spezielle zulässige Variation w zu bestimmen, für welche sich die Variationsgleichung als nicht erfüllt herausstellt. Demgegenüber läßt sich der von Herrn *Courant* in seiner Dissertation entwickelte Beweis als ein in gewisser Weise direkter Beweis bezeichnen. Herr *Courant* drückt den Wertunterschied der Funktion V an zwei verschiedenen Stellen des Bereichs durch ein Doppelintegral aus und schließt durch eine Diskussion dieses Ausdrucks unter nochmaliger Benutzung der Näherungsfunktionen, daß die Größe V bei der Annäherung an eine Grenze des Bereichs konstant werden muß.

Neben diesen allgemeinen Beweisen für den Fall des unendlich hohen Zusammenhanges erwähne ich noch die in meiner Note „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode" sowie von Herrn *Courant* in seiner Dissertation mitgeteilten direkt auf der Minimaleigenschaft sich gründenden Beweise für den Fall endlichen, insbesondere einfachen Zusammenhanges. Einen derartigen Beweis hat auch Herr *Hilbert* selbst in einer von ihm im Sommer 1909 gehaltenen Vorlesung mitgeteilt.

§ 15. *Nähere Betrachtung zweier Beispiele: Das Fundamentaltheorem von der Uniformisierung algebraischer Kurven durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus. Konforme Abbildung eines $(p+1)$-fach zusammenhängenden schlichten Bereichs auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich.*

Wir wollen jetzt speziell annehmen, daß die zu Grunde liegende Fläche F die *Riemann*sche Fläche einer algebraischen Funktion $y(x)$ vom Geschlecht p ist. Dann lassen sich p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte konstruieren, durch welche die Fläche F in einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich F' verwandelt wird. Diese Fläche F' kann in

derselben Weise wie oben S. 203 die gleichbezeichnete Fläche F' als Grundexemplar zur Bildung einer relativ zu F unendlich-vielblättrigen Überlagerungsfläche Φ ohne relative Windungspunkte dienen. Wir bilden nun die Fläche Φ, was auf Grund unseres allgemeinen Abbildungstheorems möglich ist, umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich T ab mittels einer Funktion, die wir mit $t(x, y)$ bezeichnen wollen. Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sind in dem Gebiete T eindeutige Funktionen, und es soll jetzt weiter gezeigt werden, daß die einzelnen relativen Zweige der Funktion $t(x, y)$ durch *lineare Substitutionen* aus einander hervorgehen. Wenn dies gezeigt ist, so ist bewiesen, daß bei der erwähnten konformen Abbildung das Bild des einzelnen Exemplares F' ein schlichter Fundamentalbereich mit $2p$ paarweise durch lineare Substitutionen auf einander bezogenen Randkurven ist. Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sind dann automorphe Funktionen des *Schottky*schen Typus. Wir haben also dann die Funktion $y(x)$ im Sinne des von Herrn *Klein* Math. Ann. Bd. 19 (1882) aufgestellten Fundamentaltheorems uniformisiert.

Den gewünschten *Linearitätsbeweis* erbringe ich nun in folgender Weise.

Ich zeige zunächst, daß die *Summe der Quadrate der Umfänge* sämtlicher Einteilungslinien des Bereichs T, d. s. die den verschiedenen relativen Zweigen der Funktion $t(x, y)$ entsprechenden verschiedenen Bilder der auf F gezogenen Rückkehrschnitte, konvergiert. Darauf beweise ich den Satz, daß, wenn mit $t'(t)$ irgend eine analytische Funktion von t bezeichnet wird, durch deren Vermittlung das Gebiet T (genauer gesagt, das Innere des Gebietes T) umkehrbar eindeutig und konform auf ein anderes ebenfalls schlichtes Gebiet T' abgebildet wird, diese Funktion $t'(t)$ notwendig eine lineare Funktion von t ist. Diesem letzteren Beweise liegt der vorher erwähnte Satz von der Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge zu Grunde. Die Linearität ergibt sich dann aus der Bemerkung, daß, wenn t_1 und t_2 irgend zwei Zweige der Funktion $t(x, y)$ sind, die Funktion $t_2(t_1)$ wegen des relativ regulären Baues der Fläche Φ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereiches T auf sich selbst vermittelt.

Wir beweisen jetzt den Satz von der *Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge.*

Zu dem Zwecke will ich mit t_0 einen Ausgangszweig, mit $t_1, t_2, t_3, \ldots$

die übrigen Zweige der Funktion $t(x, y)$ bezeichnen. Ich beweise, daß die Summe $\sum_{a=1}^{\infty}\left(\frac{dt_a}{dt_0}\right)^2$ in jedem inneren Teilgebiete T_0 von T gleichmäßig konvergiert. Dazu gebrauche ich folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: Es sei $t'(t)$ eine für $t=0$ verschwindende analytische Funktion von t, welche für $|t|<1$ regulär erklärt ist und durch deren Vermittelung das Innere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform auf einen ebenfalls schlichten, im Endlichen liegenden Bereich abgebildet wird, dessen Begrenzungslinie vom Nullpunkte einen kürzesten Abstand <1 hat. Dann liegt der Wert der Funktion t', mithin auch der Funktion $\frac{dt'}{dt}$ in einem festen Kreise $|t|<q<1$ unterhalb einer von der Wahl der Funktion $t'(t)$ unabhängigen endlichen Schranke).*

Wählen wir nun irgendeinen Punkt $t_{0,0}$ in T_0 und konstruieren um denselben als Mittelpunkt einen Kreis k_0, dessen Radius so groß gewählt ist, daß die Kreisfläche k_0 einschließlich ihrer Peripherie ganz im Innern von T liegt, so entsprechen der Kreislinie k_0 vermöge der Funktionszweige $t_1, t_2, t_3, \ldots$ andere Linien $k_1, k_2, k_3, \ldots$ bzw. der Kreisfläche k_0 die von den Linien $k_1, k_2, k_3, \ldots$ umschlossenen Flächen. Dem Punkte $t_{0,0}$ entsprechen Punkte $t_{0,1}, t_{0,2}, t_{0,3}, \ldots$. Konstruieren wir um jeden der letzteren Punkte einen möglichst kleinen Kreis, der die Linie k mit dem entsprechenden Index noch trifft, so ist die Summe der Quadrate der Radien dieser Kreise offenbar konvergent, weil die Flächen dieser Kreise sich nicht gegenseitig überdecken, wenigstens, wenn k_0 hinreichend klein gewählt ist. Daraus folgt auf Grund unseres Hilfssatzes die gleichmäßige Konvergenz der Summe $\sum_{a=1}^{\infty}\left(\frac{dt_a}{dt_0}\right)^2$ zunächst im Kreise k_0. Wir können aber die gleichmäßige Konvergenz offenbar wegen der Willkürlichkeit der Wahl des Punktes $t_{0,0}$ und damit des Kreises k^0 auf jedes Teilgebiet T_0 von T ausdehnen.

Aus der Konvergenz der Summe $\Sigma\left(\frac{dt_a}{dt_0}\right)^2$ ergibt sich nun leicht die Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge aller Einteilungslinien des Gebietes T. Das Quadrat der Länge einer einzelnen Einteilungslinie

*) Dieser Satz drückt einen Teil des Inhaltes meines „*Verzerrungssatzes*“ aus (s. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe“ (Gött. Nachr. 1909), sowie „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II“ (Math. Ann. 69, 1910), ferner *Johansson* (Acta soc. Fenn. 40, 1). Der Beweis des hier angegebenen spezielleren Satzes ist auch aus letztgenannter Abhandlung (S. 49—50) zu entnehmen.

L_a wird nämlich in folgender Weise durch ein Integral über eine dem Ausgangsfundamentalbereiche angehörende Einteilungslinie L_0 dargestellt:

$$\Big(\int_{L_0}\Big|\frac{dt_a}{dt_0}\Big|\,|dt_0|\Big)^2=\iint_{L_0\,L_0}\Big|\frac{dt_a}{dt_0}\Big|\,\Big|\frac{d\bar{t}_a}{d\bar{t}_0}\Big|\,|dt_0|\,|d\bar{t}_0|<\frac{1}{2}\iint\Big(\Big|\frac{dt_a}{dt_0}\Big|^2+\Big|\frac{d\bar{t}_a}{d\bar{t}_0}\Big|^2\Big)|dt_0|\,|d\bar{t}_0|$$

$$<\iint \operatorname{Max}\Big|\frac{dt_a}{dt_0}\Big|^2_{L_0}|dt_0|\,|d\bar{t}_0|=l_0^2\operatorname{Max}\Big|\frac{dt_a}{dt_0}\Big|^2_{L_0}.$$

In vorstehenden Formeln bedeuten t_0 und $\bar{t}_0$ zwei auf L_0 unabhängig variabel gedachte Punkte, t_a und $\bar{t}_a$ die entsprechenden Punkte auf L_α, l_0 den Umfang von L_0.

Nachdem somit die Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge der Einteilungslinien des Bereiches T bewiesen ist, ist der Beweis der Linearität der von uns untersuchten Abbildungsfunktion $t'(t)$, durch deren Vermittlung T auf T' abgebildet wird, eine unmittelbare Folge des *Cauchy*schen Integrals, wenn man noch beachtet, daß der Einteilung des Gebietes T entsprechend auch die Fläche T' eine Einteilung besitzt und daß für diese Einteilung aus demselben Grunde wie für T der Satz von der Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge der Einteilungslinien gilt. Von letzterem Satze für T' wird dabei nur in soweit Gebrauch gemacht, als daraus unmittelbar folgt, daß die Summe der Quadrate der Schwankungen der Funktion $t'(t)$ auf den Einteilungslinien von T konvergiert*).

An Stelle des oben angegebenen Hilfssatzes kann man auch, wie Herr *Courant* (Dissertation) bemerkt hat, den oben S. 222 hergeleiteten Hilfssatz benutzen. Dieser Hilfssatz kann auch folgendermaßen formuliert werden:

*Hilfssatz***): *„Wenn eine analytische Funktion der komplexen Variablen $z=x+iy$ innerhalb des Einheitskreises regulär erklärt ist und im Nullpunkte verschwindet, wenn ferner der Flächeninhalt des bei der konformen Abbildung durch die analytische Funktion sich ergebenden Bildgebietes <1 ist, so liegt der absolute Betrag der von der Funktion in dem Kreise $|z|<q<1$ angenommenen Werte unterhalb einer von der Wahl der Funktion unabhängigen endlichen Schranke, welche nur von q abhängt.*

---

*) Bezüglich der Art der Anwendung des *Cauchy*schen Integrals verweise ich auf meine Arbeit „Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird“ (Jahresbericht der D. M. V. 15, 1906), sowie auf die Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II“ (Math. Ann. 69, 1910, S. 30).

**) Vgl. meine „vierte Mitteilung“ (S. 16) und die Dissertation von Herrn *Courant* (§ 6–7), wo sich auch eine bemerkenswerte Modifikation meines Linearitätsbeweises findet.

Gehen wir nunmehr über zu dem Probleme der konformen Abbildung eines $(p+1)$-fach zusammenhängenden schlichten Bereiches B auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich K.

Dieses Problem ist mit dem vorhergehenden nahe verwandt. Es kann geradezu als ein spezieller Fall des ersteren interpretiert werden. Wir dürfen annehmen, daß alle Begrenzungslinien von B reguläre geschlossene Begrenzungslinien sind. Ist das nicht der Fall, so erreichen wir dieses Ziel, indem wir mehrmals von dem *Osgood*schen Satze über einfach zusammenhängende Bereiche Gebrauch machen. Wir bilden zunächst den von der ersten Begrenzungslinie allein begrenzten einfach zusammenhängenden Teil der Ebene, welcher den Bereich B enthält, auf die Fläche eines Kreises ab, wobei der Bereich B in einen Bereich B_1 übergeht. Dadurch ist eine Begrenzungslinie in eine durchaus reguläre Linie verwandelt. Dieselbe Operation wenden wir jetzt auf die zweite Begrenzungslinie von B_1 an, wodurch B_1 in B_2 übergeht usw. Nach $p+1$ Operationen sind wir zu einem Bereiche B_{p+1} gelangt, der lauter reguläre Begrenzungslinien besitzt, von welchen die letzte eine Kreislinie ist. Für diesen Bereich wollen wir die Bezeichnung B beibehalten.

Spiegeln wir den Bereich B an seiner kreisförmigen Begrenzungslinie, ebenso den unbekannten Kreisbereich K an der entsprechenden Kreislinie, so erhalten wir einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich $B+B'$, welcher auf einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich $K+K'$ abzubilden ist mit der Nebenbedingung, daß zugeordneten Randpunkten des Bereiches $B+B'$, d. s. in bezug auf die Kreislinie spiegelbildlich sich entsprechende Randpunkte, in zugeordnete Randpunkte des Bereiches $K+K'$ übergehen sollen. Bei letzterem Bereiche wird diese Zuordnung ersichtlich durch lineare Funktionen vermittelt. Wir haben also die Aufgabe, einen von $2p$ Randkurven begrenzten Bereich mit paarweise *regulär analytischer* Zuordnung der Randlinien zueinander auf einen Bereich mit $2p$ paarweise *linear* bezogenen Randlinien abzubilden. Auf Grund der kombinatorischen Methoden oder auch der *Hilbert*schen Methode des *Dirichlet*schen Prinzips können wir nun leicht eine analytische Funktion konstruieren, welche in dem gegebenen $2p$-fach zusammenhängenden Bereiche eindeutig ist und den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, ferner bei den Randsubstitutionen des Bereiches ungeändert bleibt. Der Bereiches wird durch Ver-

mittelung dieser Funktion in eine längs p Rückkehrschnitten aufgeschnitten zu denkende *Riemann*sche Fläche F vom Geschlecht p transformiert. Dadurch sind wir zu der Auffassung des vorher behandelten Fundamentaltheorems zurückgelangt.

Ohne die Zurückführung auf das genannte Fundamentaltheorem zu benutzen, können wir folgendermaßen verfahren. Wir konstruieren aus der Fläche B mit den regulären analytischen Begrenzungslinien in folgender Weise eine mit unendlich vielen *Faltungslinien**) versehene unendlich-vielblättrige Hilfsfläche Φ. Zunächst heften wir an jede Begrenzungslinie von B je ein Neuexemplar der Fläche B an, wodurch B in eine Fläche $B^{(1)}$ mit $p(p+1)$ Begrenzungslinien übergeht. An jede Begrenzungslinie von $B^{(1)}$ heften wir wieder je ein Neuexemplar B an, wodurch aus $B^{(1)}$ eine Fläche $B^{(2)}$ entsteht usw. Die Fläche $\Phi = \lim_{n=\infty} B^{(n)}$ ist schlichtartig, und wir können auf dieselbe ohne weiteres das allgemeine Abbildungstheorem anwenden, da die *Schwarz-Neumann*schen kombinatorischen Methoden, auf welche wir uns in dieser Abhandlung stützen, als einzige Voraussetzung über die inneren Punkte des Bereiches nur die machen, daß um jeden einzelnen derartigen Punkt herum eine auf die Fläche eines schlichten Kreises konform abbildbare Umgebung abgegrenzt werden kann. Die Fläche Φ geht bei der konformen Abbildung in ein schlichtes Gebiet S über, welches in lauter konforme Bilder des Bereiches B zerlegt wird. Alle diese Bilder entstehen aus einem, $\mathfrak{R}$, unter ihnen in ganz analoger Weise, wie aus einem von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich durch sukzessive Spiegelungen unendlich viele glatt nebeneinander zu liegen kommende, die Ebene bis auf diskrete Punkte ausfüllende Kreisbereiche entspringen.

Fassen wir eine Begrenzungslinie des Bereiches $\mathfrak{R}$ ins Auge. Durch diese Linie werden die sämtlichen den Bereich S erfüllenden Bilder des

---

*) Will man das Zustandekommen von *Faltungslinien* vermeiden, so kann man z. B. zunächst von dem Bereiche B zu einem von lauter zur Achse des Reellen parallelen geradlinigen Strecken begrenzten Bereich übergehen. An einem solchen Bereiche läßt sich der an einem Kreisbereiche vorgestellte unendliche Spiegelungsprozeß vollständig analogisieren, indem man stets an geradlinigen Strecken spiegelt. Die so entstehende Fläche ist eine unendlich-vielblättrige *Riemann*sche Fläche, innerhalb welcher die Endpunkte jener Strecken und aller durch Spiegelung sich weiter ergebenden Strecken Windungspunkte erster Ordnung sind.

Bereiches B bzw. $\mathfrak{R}$ eingeteilt in solche Bilder, die außerhalb L liegen, und solche, die innerhalb L liegen. Erstere erfüllen einen Bereich S_a, letztere einen Bereich S_i, und es ist $S_a + S_i = S$. Der Bereich S_a entspricht vermöge der durch L definierten analytischen Spiegelung umkehrbar eindeutig dem Bereiche S_i. Man kann nun eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereiches S auf einen ebenfalls schlichten Bereich S' definieren, bei welcher L in eine Kreislinie übergeht. Zu dem Zwecke hat man nur nötig, die von L umschlossene einfach zusammenhängende Fläche auf die Fläche eines Kreises abzubilden. Die Abbildungsfunktion erklärt sich dann auf Grund des *Schwarz*schen Spiegelungsprinzips von selbst auch für die Fläche S_a. Diese Abbildungsfunktion muß nun wegen der Konvergenz der Quadratsumme der Umfänge der Einteilungslinien von S, sowie der Summe der Quadrate der Schwankungen der Abbildungsfunktion auf den erwähnten Linien aus denselben Gründen, wie oben die Funktion $t'(t)$, eine lineare Funktion sein. Daraus folgt, weil das Bild von L eine Kreislinie ist, daß auch die Linie L eine Kreislinie ist.

Ich will zum Schlusse noch folgenden in unseren Betrachtungen enthaltenen interessanten Satz aussprechen, welcher eine rein funktionentheoretische Definition des mehrfach zusammenhängenden Kreisbereiches gibt.

Satz): Ist B ein von $p+1$ geschlossenen regulären analytischen Linien begrenzter Bereich, welcher im Sinne des Schwarzschen Spiegelungsprinzips für analytische Linien genau dieselbe Folge von Spiegelungsoperationen gestattet, welche ein von $p+1$ Vollkreisen begrenzter Bereich im Sinne der*

---

*) S. Gött. Nachr., 22. Febr. 1908 (Voranzeige), sowie Gött. Nachr., 20. Febr. 1909 („Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe"), woselbst ich außer der hier dargelegten Methode der Überlagerungsfläche noch eine andere, als *iterierendes Verfahren* bezeichnete Methode zur Lösung der betrachteten Aufgabe mitgeteilt habe. Bezügl. des *iterierenden Verfahrens* verweise ich auch auf die Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II", wo ein von dem früheren Beweise verschiedener Konvergenzbeweis für das iterierende Verfahren mitgeteilt ist. Die Tragweite dieses letzten Konvergenzbeweises wie überhaupt des *iterierenden Verfahrens* zeigt sich in vollem Umfange erst bei der Behandlung der allgemeinsten *Klein*schen Fundamentaltheoreme (*Klein*, Math. Ann. 21, 1883). Ich verweise diesbezüglich auf meine vorläufige Note „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. (Fortsetzung und Schluß)", Gött. Nachr., 28. Mai 1910.

Spiegelung mittels Transformation durch reziproke Radien gestattet, so ist der Bereich B ein von $p+1$ Vollkreisen begrenzter Bereich und die Spiegelungsoperationen sind sämtlich Transformationen durch reziproke Radien.

Ein analoger Satz gilt für Fundamentalbereiche des *Schottky*schen Typus, wenn die Ränderzuordnung *analytisch* ist und trotzdem alle Substitutionen der Gruppe wie bei linearer Ränderzuordnung existieren und so ausgeführt werden können, daß sich eine schlichte Nebeneinanderlagerung von Bildern des Fundamentalbereichs ergibt. Für einen solchen Fundamentalbereich ist die *analytische* Zuordnung der Ränder notwendig eine *lineare* Zuordnung.

Über die *Cremona*sche Transformation der Ebene.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Hamburg.

I.

Die Theorie der birationalen Transformationen der algebraischen Funktionen von zwei Veränderlichen läßt noch viel zu wünschen übrig. Das gilt auch von dem einfachsten Falle dieser Transformationen, von der schon so viel behandelten *Cremona*schen Transformation der Ebene. Es sind bisher immer nur solche Fälle betrachtet, wo keine besonderen Singularitäten vorhanden sind.

Es sind im wesentlichen zwei Fragen, die mir wichtig erscheinen. Die erste ist: Was wird aus einem beliebig gegebenen Divisor bei der Transformation? Diese Frage habe ich allgemein behandelt in meiner Arbeit: Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen*).

Bedeuten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Primteiler oder Kurven auf der betrachteten algebraischen Fläche, so bezeichne ich mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Zahl der Schnittpunkte der beiden Kurven. Das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ läßt sich verallgemeinern, so daß es auch definiert ist für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Divisoren sind, die auch gemeinsame Teiler haben dürfen. Das Symbol spielt in der Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen eine große Rolle. Die zweite Frage, um die es sich bei der Theorie der birationalen Transformation handelt, ist daher: Wie ändert sich bei der Transformation das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$? oder kann man erreichen, daß $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}')$ wird, wenn $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ die Divisoren sind, in die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bei der Transformation übergehen? Diese beiden Fragen sollen im folgenden

*) Rend. del Circ. mat. di Palermo, Bd. 26 (1908), S. 113.

behandelt werden und zwar für den einfachen Fall der rationalen Funktionen von zwei Veränderlichen. Die erste Frage ist zwar schon in der oben angegebenen Arbeit erledigt, aber ich will auch darauf für den hier zu behandelnden besonderen Fall noch einmal eingehen, so daß diese Arbeit die Kenntnis der früheren nicht voraussetzt.

Das Resultat der vorliegenden Arbeit ist recht einfach und besteht wesentlich in drei Sätzen, die ich schon hier kurz charakterisieren will. Bei der birationalen Transformation rationaler Funktionen von zwei Veränderlichen oder bei der eineindeutigen Abbildung zweier Ebenen auf einander entspricht zwar im allgemeinen einem Punkte eindeutig wieder ein Punkt. Jedoch gibt es eine endliche Zahl von Punkten, denen Kurven entsprechen, sowie auch Kurven, denen Punkte entsprechen. Diese Punkte und Kurven heißen Fundamentalpunkte und -kurven der Transformation. Um vollkommen angeben zu können, was bei der Transformation aus einem Primteiler wird, muß man den Fundamentalpunkten in ganz bestimmter Art Primteiler zuordnen. Diese bezeichne ich mit kleinen deutschen Buchstaben, und zwar für die eine Ebene mit $\mathfrak{a}_i$ und für die andere mit $\mathfrak{b}_i$, und nenne sie Primteiler zweiter Art, während die den Kurven der beiden Ebenen entsprechenden Primteiler Primteiler erster Art genannt werden sollen. Während für Primteiler erster Art $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Wert $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ einfach als Zahl der Schnittpunkte der beiden den Primteilern entsprechenden Kurven zu definieren ist, ist die Definition von $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ oder $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ nicht so einfach. Es ist mir nicht leicht geworden hierfür die passende Definition zu finden, wohl auch deshalb, weil die Werte von $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$, $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ nicht ganzzahlig zu sein brauchen, was ich zunächst für unwahrscheinlich hielt. Unter Benutzung der Primteiler zweiter Art kann man das Wesen der drei Sätze, um die es sich in dieser Arbeit handelt, in folgender Weise angeben:

1. Jeder Divisor, der aus Primteilern erster und zweiter Art beliebig zusammengesetzt sein kann, geht bei der Transformation in einen ganz bestimmten anderen Divisor über.

2. Sind die beiden Divisoren $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ äquivalent, d. h. entsteht $\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}_2}$ durch Zerlegen einer rationalen Funktion der ursprünglichen Veränderlichen in Primteiler und gehen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ bei der Transformation über in $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2'$, so sind auch die beiden Divisoren $\mathfrak{D}_1'$ und $\mathfrak{D}_2'$ äquivalent.

3. Sind $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, zwei beliebige — nicht notwendig äquivalente — Divisoren und geht $\mathfrak{D}_1$ über in $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2$ in $\mathfrak{D}_2'$, so ist

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{D}_1', \mathfrak{D}_2').$$

Bei den ganz allgemeinen*) Voraussetzungen, die ich mache, ist es nicht zu verwundern, wenn zur Ableitung der an sich einfachen Ergebnisse mancherlei Rechnungen nötig sind.

Nach den Beweisen der drei Hauptsätze habe ich noch einige Abschnitte angefügt. Im ersten, Nr. XIX und XX, gebe ich an, in welcher Weise sich die Sätze und Gleichungen ändern, die für den bisher betrachteten einfachen Fall gelten. Ich beziehe mich dabei auf eine Arbeit von *A. Clebsch***), in der die wesentlichsten dieser Sätze und Formeln angegeben sind. Die dort angegebenen Sätze bleiben nicht alle richtig, wenn man wie in der vorliegenden Arbeit die Voraussetzungen verallgemeinert.

In Nr. XXI gehe ich kurz auf die Funktionaldeterminante ein und in Nr. XXII gebe ich ein numerisches Beispiel.

Es sei hier noch bemerkt, da ich in der Arbeit selbst darauf nicht zu sprechen komme, daß auch die hier behandelten allgemeinen birationalen Transformationen sich aus linearen und quadratischen zusammensetzen lassen. Der Beweis hierzu würde sich etwa so führen lassen, daß man zunächst zeigt, daß man durch quadratische Transformationen nach einem *Noether*schen Satze erreichen kann, daß im Endlichen nur voneinander getrennt liegende Fundamentalpunkte vorkommen und daß die Kurvenbüschel, die die Transformationen vermitteln, in diesen Punkten nur mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten haben. Dann aber befindet man sich in dem einfachen üblichen Fall und kann ohne weiteres den *Noether*schen Satz anwenden, daß jede solche *Cremona*sche Transformation sich aus linearen und quadratischen zusammensetzen läßt***).

---

*) Allgemein in dem Sinne verstanden, daß auch die kompliziertesten Singularitäten nicht ausgeschlossen sind.

**) *A. Clebsch*, Zur Theorie der *Cremona*schen Transformationen. Math. Ann. Bd. 4, S. 490—496.

***) Vergleiche hierzu *C. Segre*, Un' osservazione relativa alla riduzibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche (Torino Atti T. 36 [1901]), und *G. Castelnuovo*, Le trasformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano (Torino Atti T. 36 [1901]).

II.

Will man sich den Wertevorrat von zwei unabhängigen Veränderlichen veranschaulichen, so hat man zwei Möglichkeiten. Einmal kann man die beiden Veränderlichen x und y deuten als — etwa rechtwinklige kartesische — Koordinaten einer Ebene. Die unendlich fernen Stellen sind dann die Punkte der unendlich fernen Geraden. Unter der Ordnung einer ganzen rationalen Funktion von x, y versteht man die höchste Dimension der in ihr vorkommenden Glieder. Wird eine solche Funktion n-ter Ordnung als möglichst allgemein angenommen, so kommen in ihr die Glieder x^n und y^n wirklich vor. Die einfachsten Transformationen sind bei dieser Betrachtungsweise die Transformationen der Form

$$x = ax' + by' + c, \quad y = a_1 x' + b_1 y' + c_1, \quad (ab_1 - a_1 b \neq 0).$$

Diese Transformationen führen ganze Funktionen wieder in ganze Funktionen über und lassen die Ordnung einer jeden ganzen Funktion unverändert.

Die zweite Methode, sich den Wertevorrat von zwei unabhängigen Veränderlichen zu veranschaulichen, ist die, daß man sich jede der Veränderlichen in je einer komplexen Zahlenebene ausgebreitet denkt. Die unendlich fernen Stellen sind die Stellen, für die $x = \infty$, während y beliebig, und dann die Stellen, für die $y = \infty$, während x beliebig. Die Ordnung einer ganzen Funktion wird nicht durch *eine* Zahl ausgedrückt, sondern durch zwei, nämlich durch den höchsten vorkommenden Exponenten von x und den von y. Soll eine Funktion von der Ordnung (m, n) möglichst allgemein sein, so kommt in ihr das Glied mit $x^m y^n$ wirklich vor. Die einfachsten Transformationen sind von der Form

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}, \quad y = \frac{a_1 y' + b_1}{c_1 y' + d_1}, \quad (ad - bc \neq 0, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0).$$

Durch diese werden ganze Funktionen nicht wieder in ganze Funktionen übergeführt. Das schadet aber nichts; die allzu ängstliche Beschränkung auf ganze Funktionen kompliziert die Untersuchung in vielen Fällen. Die Ordnung einer Funktion bleibt aber bei der Transformation ungeändert, wenn man sie für gebrochene Funktionen in folgender Weise definiert. Ist die gebrochene Funktion dargestellt als Quotient von zwei ganzen Funktionen und hat der Zähler die Ordnung (m, n), der Nenner die Ordnung (m', n'), so ist die Ordnung der gebrochenen Funktion $(m - m', n - n')$.

Von diesen beiden Methoden ist die erste besonders für geometrische Untersuchungen geeignet, und da man bei der Betrachtung der algebra-

ischen Funktionen von zwei Veränderlichen im allgemeinen von geometrischen Fragen ausging, so ist diese Methode auch immer bei der Untersuchung dieser Funktionen benutzt worden. Aus demselben Grunde ist auch bei der *Cremona*schen Transformation bisher immer die erste Methode angewandt worden. Für analytische Untersuchungen ist dagegen die zweite Methode angemessener, und diese soll daher auch im folgenden angewandt werden.

III.

Wir betrachten zunächst den Körper der rationalen Funktionen von x, y. Einer jeden ganzen irreduktiblen rationalen Funktion $A(x, y)$ von x, y wird ein *Primteiler* $\mathfrak{A}$ zugeordnet, indem man definiert, eine Funktion R ist durch $\mathfrak{A}^a$ teilbar, wenn $\frac{R}{A^a}$ für $A=0$ weder Null noch unendlich wird. Auch den Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ werden Primteiler $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zugeordnet. Diese werden in folgender Weise definiert. Eine Funktion heißt durch $\mathfrak{L}^a$ teilbar, wenn sie für unendlich große Werte von x bei beliebigem y Null wird wie x^{-a}, und eine Funktion heißt durch $\mathfrak{M}^a$ teilbar, wenn sie bei unendlichem y für beliebiges x Null wird wie y^{-a}.

Es gilt der wichtige Satz, *jede rationale Funktion von x, y läßt sich auf eine und nur eine Art in Primteiler zerlegen.*

Ist die irreduktible ganze Funktion $A(x, y)$ von der Ordnung (a, b), so sagen wir auch, die *Ordnung* des zugehörigen Primteilers $\mathfrak{A}$ ist (a, b). Die Ordnung von $\mathfrak{L}$ setzen wir gleich $(1, 0)$ und die von $\mathfrak{M}$ gleich $(0, 1)$.

Das Produkt von irgendwelchen Primteilern, jeder in irgendeiner positiven oder negativen ganzzahligen Potenz genommen, heißt ein *Divisor.* Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ Primteiler von den Ordnungen (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \ldots$ und ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1} \mathfrak{A}_2^{\alpha_2} \cdots$$

ein Divisor, so heißt

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots)$$

die *Ordnung des Divisors.* Die Divisoren, die den Funktionen des Körpers entsprechen, haben die Ordnung $(0, 0)$. Bei den rationalen Funktionen von x, y gilt auch das Umgekehrte.

Alle Divisoren werden in *Klassen* eingeteilt, indem man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnet, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers entspricht. Da ein Divisor, der einer Funktion

des Körpers entspricht, die Ordnung $(0, 0)$ hat, so haben alle Divisoren derselben Klasse dieselbe Ordnung. Das gilt hier bei den rationalen Funktionen von x, y auch umgekehrt, nämlich: zwei Divisoren, die dieselbe Ordnung haben, gehören derselben Klasse an. Divisoren derselben Klasse heißen zueinander *äquivalent*, in Zeichen $\backsim$.

Es sei x_0, y_0 irgendein Wertepaar von x, y. Es erweist sich als zweckmäßig, wenn man jedem Primteiler für jede Stelle x_0, y_0 eine bestimmte Funktion zuordnet. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler, und es sei $A(x, y)$ diejenige ganze Funktion, durch die $\mathfrak{A}$ definiert ist. Wir setzen dann

$$x - x_0 = u, \quad y - y_0 = v,$$

wo unter $x - x_0$ für unendlich großes x_0 zu verstehen ist $\frac{1}{x}$ und ebenso unter $y - y_0$ für $y = \infty$ $\frac{1}{y}$. Es wird dann

$$A(x, y) = \frac{\bar{A}(u, v)}{u^\sigma v^\tau},$$

wo $\bar{A}(u, v)$ eine ganze rationale Funktion von u, v sein soll, und wo also σ nur dann von Null verschieden ist, wenn $x_0 = \infty$, und τ nur dann, wenn $y_0 = \infty$. Die Funktion $\bar{A}(u, v)$ nennen wir die dem Primteiler $\mathfrak{A}$ für die Stelle x_0, y_0 *zugeordnete Funktion*. Solch eine zugeordnete Funktion soll aber nur bestimmt sein bis auf eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$. Ist also z. B. $\bar{A}(0, 0)$ von Null verschieden, ist also $\bar{A}(u, v)$ selbst eine Einheit für die Stelle $0, 0$, so können wir als zugeordnete Funktion die Zahl 1 nehmen.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei voneinander verschiedene Primteiler. x_0, y_0 sei eine Stelle, für die die zugeordneten Funktionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von 1 verschieden sind. Es seien $\bar{A}(u, v)$ und $\bar{B}(u, v)$ diese zugeordneten Funktionen. Die Kurven $\bar{A}(u, v) = 0$ und $\bar{B}(u, v) = 0$ haben dann in der Umgebung der Stelle $u = v = 0$ gemeinsame Punkte. Deren Anzahl sei h. Diese Zahl h sei für alle Stellen bestimmt, für die die zugeordneten Funktionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide von 1 verschieden sind. Es ist dann Σh die Gesamtzahl der Schnittpunkte der beiden Kurven $A(x, y) = 0$ und $B(x, y) = 0$. Wir setzen

$$\Sigma h = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}).$$

Für das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ergibt sich ein einfacher Wert. Ist nämlich die Ordnung von $\mathfrak{A}$ gleich (a_1, a_2) und die von $\mathfrak{B}$ gleich (b_1, b_2), so ist

(1.) $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = a_1 b_2 + a_2 b_1 *).$$

Das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ verallgemeinern wir, indem wir es auch definieren für beliebige Divisoren. Wir setzen fest, daß die Rechenregeln gelten sollen

(2.) $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_2), \quad \left(\mathfrak{A}, \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}\right) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1) - (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_2).$$

Mit Hilfe dieser Regeln läßt sich $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ für beliebige Divisoren zurückführen auf Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Primteiler sind. Damit ist $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ definiert, wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ keinen Primteiler gemeinsam haben. Um auch den Fall, wo $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ einen oder mehrere Primteiler gemeinsam haben, nicht auszuschließen, haben wir noch festzusetzen, was unter $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ zu verstehen ist. Wir definieren $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ so, daß wir die Formel (1.) rein formal auch auf diesen Fall anwenden. Also

(3.) $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 2 a_1 a_2.$$

Ist jetzt

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{A}_1^{a_1} \mathfrak{A}_2^{a_2} \cdots, \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \cdots,$$

so wird

(4.) $$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \Sigma \alpha_i \beta_k (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_k).$$

Es sei (a_i, a_i') die Ordnung von $\mathfrak{A}_i$ und (b_i, b_i') die von $\mathfrak{B}_i$. Dann wird

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \Sigma \alpha_i \beta_k (a_i b_k' + a_i' b_k) = \Sigma \alpha_i a_i \cdot \Sigma \beta_i b_i' + \Sigma \alpha_i a_i' \cdot \Sigma \beta_i b_i,$$

(5.) $$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = q_1 q_2' + q_1' q_2,$$

wo (q_1, q_1') die Ordnung von $\mathfrak{Q}_1$ und (q_2, q_2') die von $\mathfrak{Q}_2$ bedeutet. Da Divisoren derselben Klasse in der Ordnung übereinstimmen, so besteht der wichtige Satz:

Das Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ *ändert sich nicht, wenn man* $\mathfrak{Q}_1$ *und* $\mathfrak{Q}_2$ *durch irgendeinen anderen Divisor ihrer Klassen ersetzt.*

Das Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ ist eigentlich nicht eine Funktion der Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ sondern der Klassen $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$.

IV.

Es sei $A(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y. Dieser entspricht ein Primteiler $\mathfrak{A}$. Setzen wir $A = 0$, so geht der Körper der

*) Siehe *A. Brill*, Über Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen, § 2 (Math. Ann. Bd. 5) oder *H. W. E. Jung*, Kurvenscharen in einer Ebene, § 4 (Dieses Journal, Bd. 134).

rationalen Funktionen von x und y über in einen algebraischen Körper einer Veränderlichen. Diesen bezeichnen wir auch mit $\mathfrak{A}$. Die Funktionen des Körpers der rationalen Funktionen von x und y und des Körpers $\mathfrak{A}$ entsprechen sich in der Weise, daß jeder Funktion des Körpers (x, y) eine und nur eine des Körpers $\mathfrak{A}$ entspricht, nämlich diejenige, in die sie für $A = 0$ übergeht. Gleichungen, die zwischen den Funktionen des Körpers (x, y) bestehen, bestehen auch zwischen den ihnen entsprechenden Funktionen von $\mathfrak{A}$. Umgekehrt entsprechen natürlich jeder Funktion von $\mathfrak{A}$ unendlich viele Funktionen des Körpers (x, y). Den Übergang vom Körper x, y zum Körper $\mathfrak{A}$ wollen wir auch so ausdrücken, daß wir sagen, wir setzen $\mathfrak{A} = 0$.

Hiernach liegt es nahe, den Begriff des Primteilers allgemeiner zu fassen und ihn unabhängig zu machen von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen, nämlich so: Ist $\mathfrak{A}$ irgendein algebraischer Körper einer Veränderlichen, der dem Körper (x, y) in der Weise zugeordnet ist, daß jeder Funktion aus (x, y) eine Funktion aus $\mathfrak{A}$ entspricht und daß alle Gleichungen, die zwischen den Funktionen aus (x, y) bestehen, auch zwischen den ihnen entsprechenden Funktionen bestehen, so nennen wir $\mathfrak{A}$ einen Primteiler. Den Übergang vom Körper (x, y) zu $\mathfrak{A}$ drücken wir wieder so aus, daß wir sagen, wir setzen $\mathfrak{A} = 0$. Es bleibt zu definieren, was wir darunter verstehen, daß eine Funktion durch $\mathfrak{A}^a$ teilbar ist. Unter allen den Funktionen aus (x, y), die für $\mathfrak{A} = 0$ identisch den Wert 0 annehmen, gibt es immer, wie sich später noch zeigen wird, solche, die von möglichst niedriger Ordnung verschwinden. Eine solche sei $G(x, y)$. Diese Funktion braucht nicht ganz zu sein; sie ist, wie wir sehen werden, unter Umständen sogar sicher gebrochen. Wir sagen dann, eine Funktion $R(x, y)$ ist durch $\mathfrak{A}^a$ teilbar, wenn $\frac{R}{G^a}$ für $\mathfrak{A} = 0$ nicht identisch Null oder Unendlich wird, also entweder in eine von Null und Unendlich verschiedene Konstante übergeht oder in eine wirkliche Funktion des Körpers $\mathfrak{A}$.

V.

Es fragt sich nun, wie man die so definierten Primteiler bestimmen kann. Dabei scheint es mir wichtig, daß man diese Bestimmung durchführt unter Benutzung nur der einmal gewählten Veränderlichen x, y, also ohne

Transformationen zu Hilfe zu nehmen, um dann nachher die Resultate auf die Transformationen anzuwenden.

Es sei also $\mathfrak{A}$ irgendein Primteiler. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden. Es kann sein, daß für $\mathfrak{A}=0$ x und y nicht beide konstant werden. Es kann aber auch sein, daß x und y für $\mathfrak{A}=0$ beide konstant werden. Betrachten wir den ersten Fall. Da x und y für $\mathfrak{A}=0$ in Funktionen des Körpers $\mathfrak{A}$ einer Veränderlichen übergehen, so besteht zwischen ihnen für $\mathfrak{A}=0$ eine irreduktible Gleichung, etwa $A(x,y)=0$, Es wird dann für $\mathfrak{A}=0$ die ganze irreduktible Funktion $A(x,y)$ gleich Null, d. h. aber, der Körper $\mathfrak{A}$ ist definiert durch die Gleichung $A(x,y)=0$. Es ist demnach $\mathfrak{A}$ ein Primteiler von der in Nr. III betrachteten Art.

Wir gehen zum zweiten Fall über. Für $\mathfrak{A}=0$ werden x und y beide konstant. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß x und y beide für $\mathfrak{A}=0$ den Wert 0 annehmen. Es sei $R(x,y)$ eine Funktion des Körpers (x,y), die für $\mathfrak{A}=0$ nicht konstant wird. Stellen wir R als Quotienten von zwei ganzen Funktionen dar,

$$R=\frac{G(x,y)}{H(x,y)},$$

so muß für $x=y=0$ sowohl G wie auch H verschwinden. Denn sonst würde für $\mathfrak{A}=0$, d. h. für $x=y=0$ R konstant werden. Werden G und H beide gleich Null für $x=y=0$, so wird R vollkommen unbestimmt, wenn wir einfach setzen würden $x=y=0$. Um daher den Körper $\mathfrak{A}$ zu definieren, dürfen wir x,y nicht unabhängig voneinander dem Werte 0 zustreben lassen, sondern wir müssen eine Gleichung zwischen den Größen x,y festsetzen, so daß die eine in ganz bestimmter Art gleichzeitig mit der anderen verschwindet. Diese Gleichung muß so gewählt werden, daß bei dem Grenzübergang die Funktion R nicht konstant wird. Es muß also die Gleichung, die wir zwischen x und y festsetzen, jedenfalls *einen* Parameter t enthalten, und zwar so, daß nach dem Grenzübergang R eine Funktion von t wird.

Die Gleichung, die wir zwischen x und y annehmen müssen, sei

$$y=a_1x^{\varepsilon_1}+a_2x^{\varepsilon_2}+\cdots, \tag{6.}$$

wo $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\cdots$ und wo die Koeffizienten a_i als Parameter aufzufassen sind. Setzen wir den Wert von y aus (6.) ein, so möge sich ergeben, nach steigenden Potenzen von x geordnet,

$$G(x, y) = x^{\varrho}(g + g_1 x^{\varrho_1} + \cdots), \quad H(x, y) = x^{\sigma}(h + h_1 x^{\sigma_1} + \cdots).$$

Wäre $\varrho > \sigma$, so würde für $x = 0$ R gleich Null werden, und wäre $\varrho < \sigma$, so würde für $x = 0$ R unendlich werden. Es muß also $\varrho = \sigma$ sein. Dann wird für $x = 0$

$$R = \frac{g}{h}.$$

Da aber R nicht konstant werden soll, so muß $\frac{g}{h}$ von den Parametern a_i wirklich abhängen.

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$G(x, y) - kH(x, y) = 0, \tag{7.}$$

in der k einen willkürlichen Parameter bedeuten soll. Führen wir in die linke Seite dieser Gleichung den Wert von y aus (6.) ein, so bekommen wir

$$G(x, y) - kH(x, y) = x^{\varrho}[(g - kh) + g_1 x^{\varrho_1} - kh_1 x^{\sigma_1} + \cdots].$$

Von den Koeffizienten a_i in (6.) können einige bestimmte Zahlen sein. Aber mindestens einer muß unbestimmt bleiben. Der erste Koeffizient, der unbestimmt bleibt, sei a_ν. Es mögen also $a_1, a_2, \ldots a_{\nu-1}$ bestimmte Zahlen sein. In der Gleichung (7.) ist $g - kh$ eine Funktion der a_i, die nicht bestimmte Zahlenwerte haben. Da aber $x^{\varrho}(g - kh)$ das Glied mit der niedrigsten Potenz von x ist, so kann $g - kh$ nur von a_ν allein abhängen. Denn da $a_{\nu+1}$ mit einer höheren Potenz von x multipliziert ist als a_ν, so hat auch in $G - kH$ nach Einsetzen des Wertes von y aus (6.) jedes Glied, das $a_{\nu+1}$ enthält, eine höhere Potenz von x zum Faktor als ein Glied, das a_ν statt $a_{\nu+1}$ enthält. Es ist also $g - kh$ eine Funktion von a_ν allein, und zwar eine ganze rationale. Wir könnten daher, wenn wir wollten, a_ν als eine Wurzel der Gleichung $g - kh = 0$ bestimmen. Dann würde $G - kH$ nach Einsetzen von y aus (6.) stärker Null als x^{ϱ}. Wir könnten dann weiter $a_{\nu+1}$ in ähnlicher Art so bestimmen, daß $G - kH$ von noch stärkerer Ordnung Null würde usw. Mit anderen Worten, wir können $a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots$ so bestimmen, daß die Entwicklung (6.) eine Wurzel der Gleichung (7.) wird. Daraus schließen wir, daß die ersten $\nu - 1$ Glieder in (6.) übereinstimmen mit den $\nu - 1$ ersten Gliedern einer der Wurzeln der Gleichung $G(x, y) - kH(x, y) = 0$. Die ersten $\nu - 1$ Koeffizienten a_1, $a_2, \ldots a_{\nu-1}$ sind dabei so beschaffen, daß sie nicht von k abhängen, da sie ja reine Zahlenkoeffizienten sind. Dagegen hängt der Koeffizient des

folgenden Gliedes in der Entwicklung der Wurzel von k ab. Dieser ergibt sich als Wurzel der Gleichung

$$g(a_\nu) - k h(a_\nu) = 0. \tag{8.}$$

Da aber der Quotient $\frac{g}{h}$ von a_ν abhängen muß, wie wir gesehen haben, so hat die Gleichung (8.) oder die Gleichung

$$\frac{g(a_\nu)}{h(a_\nu)} = k$$

mindestens eine Wurzel, die von k abhängt.

Schließlich können wir noch bemerken, daß es vollkommen genügt, die Entwicklung (6.) bis zum ν-ten Gliede einschließlich zu kennen. Denn beim Grenzübergang wird

$$R = \frac{g(a_\nu)}{h(a_\nu)}$$

so daß alle weiteren Koeffizienten $a_{\nu+1}, \ldots$ auf das Resultat keinen Einfluß haben. Für a_ν schreiben wir t. Es ist dann t der Parameter, von dem die Funktionen des Körpers $\mathfrak{A}$ abhängen.

Nach diesen Ergebnissen ist das Verfahren zur Bestimmung eines Körpers $\mathfrak{A}$, in dem x und y beide konstant werden, etwa den Wert Null annehmen, während die Funktion $R(x, y)$ nicht konstant wird, folgendes. Es sei $R = \frac{G}{H}$, wo G und H teilerfremde ganze Funktionen sind. Man bilde die Gleichung

$$G(x, y) - k H(x, y) = 0$$

und stelle die Entwicklungen derjenigen Wurzeln dieser Gleichung nach steigenden Potenzen von x auf, die für $x = 0$ verschwinden. Jede dieser Entwicklungen braucht man nur bis zu dem ersten Gliede zu kennen, dessen Koeffizient von k abhängt. Eine dieser Entwicklungen sei

$$y = a_1 x^{\varepsilon_1} + a_2 x^{\varepsilon_2} + \cdots,$$

und es sei der erste Koeffizient, der von k abhängt, a_ν. Setzen wir

$$y = a_1 x^{\varepsilon_1} + a_2 x^{\varepsilon_2} + \cdots + a_{\nu-1} x^{\varepsilon_{\nu-1}} + t x^{\varepsilon_\nu}$$

in alle Funktionen des Körpers (x, y) ein und setzen dann nach gehöriger Reduktion $x = 0$, so werden alle Funktionen des Körpers (x, y) entweder konstant oder, wie z. B. R, rationale Funktionen von t. Es gehen also alle Funktionen des Körpers (x, y) in Funktionen eines Körpers einer Veränderlichen über. Da sich die Funktionen dieses Körpers durch t rational

ausdrücken lassen, so ist der Körper vom Geschlecht Null. Die so definierten Körper und *Primteiler* nennen wir *zweiter Art* und bezeichnen sie mit kleinen deutschen Buchstaben. Die anderen Primteiler, wie sie in III definiert sind, nennen wir dagegen *Primteiler erster Art* und bezeichnen sie auch weiterhin mit großen deutschen Buchstaben. Die Einteilung der Primteiler in solche erster und zweiter Art hängt natürlich ab von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen, worauf wir noch ausführlich zurückkommen. Es sei noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß die Primteiler zweiter Art nicht verwechselt werden dürfen mit den Primteilern zweiter Stufe, die ich bei anderer Gelegenheit auch mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet habe.

Aus unserer Entwicklung geht noch hervor: Es gibt immer mindestens einen Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}$, so daß für $\mathfrak{a}=0$ die Funktion R nicht konstant wird, während x und y für $\mathfrak{a}=0$ die konstanten Werte x_0 und y_0 annehmen, wenn für $x=x_0$, $y=y_0$ sowohl Zähler wie Nenner von R verschwinden; oder anders ausgedrückt: Ist in Primteiler zerlegt

$$R=\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}},$$

wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ganze teilerfremde Divisoren sein sollen, so gibt es immer dann und nur dann mindestens einen Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}$, so daß für $\mathfrak{a}=0$ R nicht konstant wird, wenn

$$(\mathfrak{G},\mathfrak{H})\neq 0.$$

Es gibt also nur dann keinen solchen Primteiler zweiter Art, wenn

$$(\mathfrak{G},\mathfrak{H})=0.$$

Da $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}=R$, also gleich einer Funktion des Körpers (x, y) ist, so ist $\mathfrak{G}\backsim\mathfrak{H}$. Es haben also $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ dieselbe Ordnung. Diese sei (a, b). Dann ist

$$(\mathfrak{G},\mathfrak{H})=2ab,$$

also nur dann gleich Null, wenn entweder a oder b den Wert Null haben. Es gibt also dann und nur dann keinen Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}$, so daß für $\mathfrak{a}=0$ die Funktion R nicht konstant wird, wenn R entweder nur eine Funktion von x oder nur eine Funktion von y ist.

VI.

Wir können jetzt auch genauer angeben, wie man entscheiden kann, durch welche Potenz eines Primteilers zweiter Art eine gegebene Funktion

teilbar ist. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Primteiler zweiter Art. Er sei definiert durch die Gleichung

$$(9.) \qquad y = a_1 x^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} + a_2 x^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}} + \cdots + a_{\nu-1} x^{\frac{\varepsilon_{\nu-1}}{\varepsilon}} + t x^{\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon}},$$

wo wir jetzt annehmen, daß die $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ positive ganze Zahlen sind und daß der Nenner ε so klein wie möglich gewählt ist. Führen wir den Wert von y aus (9.) in die Funktion $F(x, y)$ des Körpers (x, y) ein und entwickeln nach steigenden Potenzen von x, so ergebe sich

$$F(x, y) = f_0 x^{\frac{\alpha}{\varepsilon}} + f_1 x^{\frac{\alpha_1}{\varepsilon}} + \cdots .$$

Ist $\alpha > 0$, so wird für $x = 0$, d. h. für $\mathfrak{a} = 0$ die Funktion F auch Null; ist $\alpha < 0$, so wird für $\mathfrak{a} = 0$ die Funktion F unendlich. Im ersten Falle ist F durch eine positive Potenz von $\mathfrak{a}$ teilbar, im zweiten durch eine negative. Um genau diejenige Potenz von $\mathfrak{a}$ zu finden, durch die F teilbar ist, haben wir nach der früher gegebenen Definition eine Funktion zu suchen, die für $\mathfrak{a} = 0$ von möglichst niedriger Ordnung verschwindet. Es ist aber die kleinste Potenz von x, durch die eine rationale Funktion von x, y nach Einsetzen von (9.) teilbar werden kann, die Potenz $x^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Wir können aber die Gleichung (9.) auffassen als algebraische Gleichung zwischen x und y, und nach einem Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen gibt es immer eine Funktion, deren Entwicklung nach steigenden Potenzen von x genau mit $x^{\frac{1}{\varepsilon}}$ beginnt. Also ist die Funktion F genau teilbar durch $\mathfrak{a}^\alpha$. Hiernach ist es in jedem Falle leicht zu entscheiden, durch welche Potenz eines Primteilers $\mathfrak{a}$ eine gegebene Funktion teilbar ist.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen und auch die Teilbarkeit eines Primteilers erster Art durch einen zweiter Art definieren. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art und $\mathfrak{b}$ einer zweiter Art. Für $\mathfrak{b} = 0$ werde $x = x_0$, $y = y_0$. Wir setzen

$$x - x_0 = u, \quad y - y_0 = v,$$

wo unter $x - x_0$, $y - y_0$ zu verstehen ist $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, wenn x_0 und y_0 unendlich sind. Die $\mathfrak{b}$ definierende Gleichung sei

$$v = a_1 u^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} + a_2 u^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}} + \cdots,$$

wo die ε ganze positive Zahlen sind, und der Nenner ε so klein gewählt

ist wie möglich. Es sei ferner $P(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle x_0, y_0. Setzen wir in $P(u, v)$ statt v den Wert aus der vorstehenden Gleichung und ordnen nach steigenden Potenzen von v, so möge sich ergeben

$$P(u, v) = v^{\frac{a}{\varepsilon}} p_0 + v^{\frac{a_1}{\varepsilon}} p_1 + \cdots .$$

Wir sagen dann, der Primteiler $\mathfrak{P}$ ist durch $\mathfrak{b}^a$ teilbar. Ist dann eine Funktion R aus dem Körper (x, y) in Primteiler — erster Art — zerlegt,

$$R = \mathfrak{P}_1^{\beta_1} \mathfrak{P}_2^{\beta_2} \cdots$$

und ist $\mathfrak{P}_i$ durch $\mathfrak{b}^{\alpha_i}$ teilbar, so ist R genau teilbar durch $\mathfrak{b}^{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots}$, wie man sofort sieht, wenn man R durch die zugeordneten Funktionen der $\mathfrak{P}$ für die Stelle x_0, y_0 darstellt. Hiernach ist es unnötig, bei der Zerlegung von Funktionen in Primteiler die Primteiler zweiter Art besonders aufzuführen, da sie in denen erster Art enthalten und durch diese mitbestimmt sind.

Wir erweitern jetzt den Begriff des Divisors dahin, daß wir zur Bildung eines Divisors auch Primteiler zweiter Art zulassen. Enthält ein Divisor nur Primteiler erster Art, so nennen wir ihn einen Divisor erster Art; enthält er nur Primteiler zweiter Art, so soll er Divisor zweiter Art heißen. Es ist dann jeder Divisor darstellbar als Produkt von einem Divisor erster Art und einem Divisor zweiter Art. Wir teilen auch jetzt wieder alle Divisoren in Klassen ein, indem wir zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse nehmen, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers entspricht. Da einer Funktion des Körpers aber immer ein Divisor erster Art entspricht, so gehören zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse, wenn sie in dem Divisor zweiter Art, den sie enthalten, übereinstimmen und die in ihnen enthaltenen Divisoren erster Art derselben Klasse angehören.

VII.

Wir gehen nunmehr zur birationalen Transformation über. Die ursprünglichen Veränderlichen bezeichnen wir mit x, y und die neuen mit ξ, η. Die Transformationsgleichungen seien

$$(10.) \qquad x = \frac{F(\xi, \eta)}{F_1(\xi, \eta)}, \quad y = \frac{G(\xi, \eta)}{G_1(\xi, \eta)},$$

aus denen sich ergeben möge

$$(10'.) \qquad \xi = \frac{H(x,y)}{H_1(x,y)}, \quad \eta = \frac{K(x,y)}{K_1(x,y)}.$$

Die beiden Körper (x,y) und (ξ,η) sind also miteinander identisch.

Wir haben alle Primteiler in zwei Arten eingeteilt. Aber diese Einteilung hing ab von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen. Es kann also ein Primteiler von der ersten Art sein in bezug auf x,y, während er in bezug auf ξ,η von der zweiten Art ist, und umgekehrt. Diese Primteiler wollen wir *singulär* nennen für die betrachtete Transformation, oder einfach singulär, da es sich hier nur um diese eine Transformation handelt.

Jedem Primteiler entspricht ein bestimmter algebraischer Körper einer Veränderlichen. Jeder solche Körper bleibt bei birationalen Transformationen invariant, die zugehörigen Primteiler im allgemeinen aber nicht, wir wir sehen werden. Wir können daher die Primteiler nicht mehr gerade so bezeichnen wie die entsprechenden Körper. Wir bezeichnen einen Körper einer Veränderlichen jetzt mit einem überstrichenen großen deutschen Buchstaben. Den zugehörigen Primteiler bezeichnen wir mit demselben deutschen Buchstaben, und zwar mit einem großen, wenn es ein Primteiler erster Art, mit einem kleinen, wenn es ein Primteiler zweiter Art ist. Schließlich fügen wir noch einen Akzent hinzu, um anzudeuten, daß der Primteiler in bezug auf ξ,η gemeint ist.

Soll ein Primteiler $\mathfrak{b}$ zweiter Art in Bezug auf x,y ein singulärer Primteiler sein, so dürfen für $\mathfrak{b}=0$ ξ und η nicht beide konstant werden. Wie diese Primteiler zu bestimmen sind, haben wir in Nr. IV eingehend besprochen. Danach kann es nur eine endliche Zahl solcher Primteiler geben. Diese Zahl sei m. Die singulären Primteiler seien

$$(11.) \qquad \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_m.$$

Der $\mathfrak{b}_i$ entsprechende Primteiler wäre, wenn wir ihn auf ξ,η beziehen, mit $\mathfrak{B}_i'$ zu bezeichnen, wir wollen aber bei diesen Primteilern den Akzent fortlassen und sie einfach mit

$$(12.) \qquad \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_m$$

bezeichnen. Für $\mathfrak{b}_i=0$ gehen ξ und η, ohne beide konstant zu werden, in Funktionen des Körpers $\mathfrak{B}_i$ über. Es besteht also dann zwischen ihnen eine algebraische Gleichung

$$(13.) \qquad B_i(\xi,\eta)=0.$$

Umgekehrt gibt es auch Primteiler, die in bezug auf x, y von der ersten Art sind, aber inbezug auf ξ, η von der zweiten Art. Ihre Anzahl ist, wie wir später (in Nr. XIX) beweisen werden, auch gleich m. Wir bezeichnen sie als Primteiler von (x, y) mit

(14.) $$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_m$$

und als Primteiler von (ξ, η) mit

(15.) $$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m;$$

wir lassen also auch bei den $\mathfrak{a}_i$ den Akzent fort, den wir eigentlich hinzufügen müßten. Die Gleichung, die für $\mathfrak{A}_i = 0$ zwischen x und y besteht, sei

(16.) $$A_i(x, y) = 0.$$

Wie wir in Nr. IV sahen, sind dann und nur dann keine singulären Primteiler $\mathfrak{b}_i$ vorhanden, wenn die Funktionen $\frac{H}{H_1}$ und $\frac{K}{K_1}$ entweder nur von x oder nur von y abhängen. Da nicht beide nur von x oder nur von y abhängen können, so hängt dann etwa $\xi = \frac{H}{H_1}$ nur von x und $\eta = \frac{K}{K_1}$ nur von y ab. Damit auch x und y eindeutige Funktionen von ξ und η werden, muß dann nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie die Transformation von der Form sein:

$$\xi = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \eta = \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1}, \quad (ad - bc \neq 0, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0).$$

Hat die Transformation diese Gestalt, so sind also keine singulären Primteiler $\mathfrak{b}_i$ vorhanden, aber auch keine $\mathfrak{a}_i$, da deren Anzahl mit der der $\mathfrak{b}_i$ übereinstimmt. Es ist danach diese Transformation die einzige, bei der keine singulären Primteiler vorkommen.

Bei geometrischer Deutung entspricht, wie schon oben angegeben, einem Primteiler erster Art von (x, y) eine Kurve in der xy-Ebene, einem Primteiler zweiter Art dagegen ein Punkt. Das Entsprechende gilt für die Primteiler in bezug auf die $\xi\eta$-Ebene. Deuten wir die Transformation als eine Transformation der beiden Ebenen, der xy-Ebene und der $\xi\eta$-Ebene, so entspricht im allgemeinen einem Punkte der einen Ebene ein Punkt der anderen und umgekehrt. Ist aber x_0, y_0 ein Punkt der xy-Ebene derart, daß etwa für $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = \cdots = \mathfrak{b}_\lambda = 0$ die Größen x und y die Werte x_0, y_0 annehmen, so entsprechen dem Punkte x_0, y_0 der xy-Ebene die Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\lambda$ oder $B_1 = B_2 = \cdots = B_\lambda = 0$ der $\xi\eta$-Ebene. Es gibt also im all-

gemeinen in der xy-Ebene Punkte, denen Kurven entsprechen, und auch umgekehrt Kurven, denen Punkte entsprechen. Die Kurven in den beiden Ebenen, denen in der anderen Ebene Punkte entsprechen, heißen *ausgezeichnete Kurven* oder *Fundamentalkurven* und die ihnen entsprechenden Punkte *Fundamentalpunkte.* Die Anzahl der Fundamentalkurven ist in beiden Ebenen dieselbe, nämlich m.

VIII.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein nicht singulärer Primteiler in bezug auf x, y. Ihm entspricht ein Körper einer Veränderlichen $\overline{\mathfrak{P}}$ und diesem entspricht ein Primteiler $\mathfrak{P}'$ in bezug auf ξ, η. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ entsprechen sich dann bei der betrachteten birationalen Transformation. Wir können aber nicht einfach sagen, daß $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ übergeht.

Es sei noch eine abkürzende Bezeichnung eingeführt. Das Produkt aus allen Primteilern zweiter Art, die in einem Divisor $\mathfrak{Q}$ aufgehen, und zwar jeder in der Potenz genommen, in der er in $\mathfrak{Q}$ enthalten ist, sei bezeichnet mit $s(\mathfrak{Q})$ oder auch $s\mathfrak{Q}$. Eine analoge Bedeutung habe für die Primteiler in bezug auf (ξ, η) das Zeichen $s(\mathfrak{Q}') = s\mathfrak{Q}'$.

Es sei die Funktion $R(x, y)$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Es gehe $R(x, y)$ bei der Transformation über in $R'(\xi, \eta)$. Ist $\mathfrak{P}$ durch einen der Primteiler erster Art in bezug auf x, y, etwa durch $\mathfrak{b}_1$ teilbar, während keiner der anderen in R enthaltenen Primteiler durch $\mathfrak{b}_1$ teilbar ist, so wird R für $\mathfrak{b}_1 = 0$ auch gleich 0 und es muß daher $R'(\xi, \eta)$ für $\mathfrak{B}_1 = 0$ verschwinden, d. h. es muß $R'(\xi, \eta)$ durch $\mathfrak{B}_1$ teilbar sein. Genauer können wir sagen, wenn R durch $\mathfrak{b}_1^a$ teilbar ist, dann muß R' durch $\mathfrak{B}_1^a$ teilbar sein. Würden wir $\mathfrak{P}$ einfach in $\mathfrak{P}'$ übergehen lassen, so würden diese Verhältnisse nicht zum Ausdruck kommen. Wir müssen vielmehr sagen, ist $\mathfrak{P}$ genau teilbar durch $\mathfrak{b}_1^{\beta} \mathfrak{b}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{b}_m^{\beta_m}$, so geht $\mathfrak{P}$ über in $\mathfrak{P}' \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{B}_m^{\beta_m}$. Hierdurch würde zum Ausdruck kommen, daß eine Funktion R, die durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist und die außer $\mathfrak{P}$ keinen Primteiler enthält, der durch singuläre Primteiler teilbar ist, durch die Transformation übergeht in eine Funktion R', die genau durch $\mathfrak{B}_1^{\beta} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{B}_m^{\beta_m}$ teilbar ist. Jedoch gibt diese Darstellung auch noch kein richtiges Bild der wirklichen Verhältnisse. Das sieht man sofort, wenn man umgekehrt zusieht, was aus dem Divisor $\mathfrak{P}' \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \cdots \mathfrak{B}_m^{\beta_m}$ beim Übergange von ξ, η zu x, y wird. Einfacher wird es schon, wenn wir sagen $\frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}$ geht bei der

Transformation über in $\mathfrak{P}'$. Nun kann aber $\mathfrak{P}'$ durch Primteiler erster Art in bezug auf ξ, η teilbar sein. Es sei etwa

$$s(\mathfrak{P}') = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\alpha_m}.$$

Gehen wir dann von $\mathfrak{P}'$ aus, so kommen wir zu dem Schlusse, daß beim Übergang von ξ, η zu x, y nicht $\mathfrak{P}'$ in $\frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}$ übergeht sondern $\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}$. Es wird also die Gleichung

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})} = \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}$$

die wirklich vorhandenen Verhältnisse darstellen.

Es sei $\mathfrak{A}_i$ einer der singulären Primteiler. Beim Übergang von x, y zu ξ, η geht $\mathfrak{A}_i$ über in $\mathfrak{a}_i$. Ist aber $\mathfrak{A}_i$ durch singuläre Primteiler $\mathfrak{b}_i$ teilbar, ist also $s(\mathfrak{A}_i)$ von 1 verschieden, so werden wir wieder sagen müssen, nicht $\mathfrak{A}_i$ sondern $\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}$ geht in $\mathfrak{a}_i$ über. Wir haben also die Gleichung

$$\text{(II.)} \qquad \frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)} = \mathfrak{a}_i.$$

Analog haben wir dann noch für die Primteiler $\mathfrak{B}_i$ die Gleichung

$$\text{(III.)} \qquad \frac{\mathfrak{B}_i}{s(\mathfrak{B}_i)} = \mathfrak{b}_i.$$

Die Gleichungen (I.), (II.), (III.) genügen, um von jedem Divisor zu sagen, was aus ihm beim Übergang von x, y zu ξ, η oder umgekehrt wird. So folgt z. B. aus den Gleichungen (I.) und (III.)

$$\text{(17.)} \qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\left(\frac{\mathfrak{B}_1}{s(\mathfrak{B}_1)}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\mathfrak{B}_2}{s(\mathfrak{B}_2)}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\frac{\mathfrak{B}_m}{s(\mathfrak{B}_m)}\right)^{\beta_m}.$$

Wir fassen das gefundene Resultat in den Satz zusammen:

Satz 1. Durch die Gleichungen (I.), (II.), (III.) *ist eindeutig bestimmt, was aus einem beliebig gegebenen Divisor bei der birationalen Transformation wird. Die Zahl, die angibt, wie oft ein Primteiler in einem Divisor enthalten ist, ist unabhängig davon, ob wir bei ihrer Bestimmung die Darstellung des Divisors durch Primteiler in bezug auf x, y oder durch solche in bezug auf ξ, η zugrunde legen.*

Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion von (x, y). Es sei in Primteiler zerlegt

$$\text{(18.)} \qquad R(x, y) = \mathfrak{P}_1^{\gamma_1}\mathfrak{P}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{P}_\lambda^{\gamma_\lambda}.$$

Durch die Transformation gehe R über in $R'(\xi, \eta)$, und es sei in Primteiler zerlegt (in bezug auf ξ, η)

$$\text{(19.)} \qquad R'(\xi, \eta) = \mathfrak{D}_1'^{\delta_1}\mathfrak{D}_2'^{\delta_2}\cdots\mathfrak{D}_\mu'^{\delta_\mu}.$$

Es ist zu zeigen, daß man unter Benutzung der Formeln (I.), (II.), (III.) aus der Darstellung (18.) die Darstellung (19.) bekommt und umgekehrt. Dies folgt aber einfach daraus, daß die Transformationsformeln (I.), (II.), (III.) so gewählt sind, daß die Potenz, in der ein Primteiler — erster oder zweiter Art — in R enthalten ist, unverändert bleibt bei Anwendung dieser Formeln und daß andererseits R' alle Primteiler in derselben Potenz enthält wie R.

Damit ist auch folgendes bewiesen. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei beliebige Divisoren — in bezug auf x, y —, die also Primteiler erster und zweiter Art enthalten können, und gehen durch die Formeln (I.), (II.), (III.) $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ über in $\mathfrak{Q}_1'$, $\mathfrak{Q}_2'$, so gehören $\mathfrak{Q}_1'$ und $\mathfrak{Q}_2'$ dann und nur dann derselben Klasse an, wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ derselben Klasse angehören. Denn hierdurch wird nichts anderes behauptet als: wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ einander äquivalent sind, wenn also $\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$ gleich einer Funktion des Körpers (x, y), etwa gleich $R(x, y)$ ist, so geht durch die Formeln (I.), (II.), (III.) $\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$ wieder über in eine Funktion des Körpers (x, y) oder (ξ, η). Das ist aber der Fall, wie wir gesehen haben. Danach haben wir den

Satz 2: Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ beliebige Divisoren und geht bei der Transformation $\mathfrak{Q}_1$ über in $\mathfrak{Q}_1'$, $\mathfrak{Q}_2$ in $\mathfrak{Q}_2'$, so ist $\mathfrak{Q}_1' \sim \mathfrak{Q}_2'$ dann und nur dann, wenn auch $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$.

IX.

Wir haben in Nr. III definiert, was unter $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ zu verstehen ist, wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ irgend zwei Divisoren erster Art sind, d. h., wenn sie nur Primteiler erster Art enthalten. Für dies Symbol galt der wichtige Satz: $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ ändert sich nicht, wenn man $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ durch Divisoren ersetzt, die ihnen äquivalent sind. Da wir jetzt auch Primteiler zweiter Art haben, so handelt es sich darum, das Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$, auch für den Fall zu definieren, daß in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Primteiler zweiter Art vorkommen.

Zunächst setzen wir fest, daß die Rechenregeln, die für das bisherige Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ gelten, bestehen bleiben sollen. Dann genügt es, zu definieren den Wert der Ausdrücke

$$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k), \quad (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{P}), \quad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k), \quad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{P}'),$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ irgend zwei Primteiler — singuläre oder nichtsinguläre — sind. Diese Definition kann uns aber nur dann etwas nützen, wenn wir

sie so einrichten, daß die beiden folgenden Sätze bestehen:

a) Sind $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ zwei beliebige Divisoren in bezug auf x, y und gehen sie beim Übergang zu ξ, η über in $\mathfrak{D}_1', \mathfrak{D}_2'$, so ist

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{D}_1', \mathfrak{D}_2').$$

b) Ist $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_3$ und $\mathfrak{D}_2 \sim \mathfrak{D}_4$, so ist $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4)$. Wenn wir auch mit den uns bisher zu Gebote stehenden Mitteln die geforderte Definition noch nicht geben können, so können wir doch schon hier unser Problem wesentlich vereinfachen.

Es sei $\mathfrak{P}$ irgendein Primteiler, der durch $\mathfrak{b}_i$ nicht teilbar ist. Solche gibt es immer. Wird nämlich $x = x_0$, $y = y_0$ für $\mathfrak{b}_i = 0$, so braucht man für $\mathfrak{P}$ nur den Zähler einer ganzen Funktion zu nehmen, die für $x = x_0$, $y = y_0$ nicht verschwindet, oder wenn wir auch unendlich große Werte von x_0 und y_0 nicht ausschließen wollen, kann man für $\mathfrak{P}$ einen Primteiler nehmen, dessen zugeordnete Funktion für die Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ nicht gleich Null wird. Da dann $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{b}_i$ nichts miteinander zu tun haben, wird man mit gutem Gewissen definieren

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{b}_i) = 0.$$

Es sei nun $\mathfrak{P}_1$ ein Primteiler, der durch $\mathfrak{b}_i$ teilbar ist. Es sei $\mathfrak{P}_1$ von der Ordnung (a, b). Dann ist der Zähler jeder ganzen Funktion von x, y, die in x, y vom Grade a, b ist, zu $\mathfrak{P}_1$ äquivalent. Aber diese Funktion läßt sich immer so wählen, daß ihr Zähler nicht durch $\mathfrak{b}_i$ teilbar ist. Es gibt also immer einen zu $\mathfrak{P}_1$ äquivalenten Primteiler $\mathfrak{P}$, der nicht durch $\mathfrak{b}_i$ teilbar ist. Da aber der Satz b) bestehen soll, so muß sein $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{b}_i) = 0$. Es bleibt also nichts anderes übrig als festzusetzen, daß für einen beliebigen Primteiler erster Art $\mathfrak{P}$ und einen beliebigen Primteiler zweiter Art $\mathfrak{b}_i$ immer ist

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{P}) = 0.$$

Es bleibt danach nur zu definieren $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$. Es genügt, $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ zu definieren, da sich daraus die Definition von $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ wegen der Symmetrie von x, y und ξ, η von selbst ergibt.

X.

Wir müssen genauer auf die Definition der singulären Primteiler eingehen. Die Transformationsformeln waren

$$(10.) \qquad x=\frac{F(\xi,\eta)}{F_1(\xi,\eta)}, \quad y=\frac{G(\xi,\eta)}{G_1(\xi,\eta)},$$

$$(10'.) \qquad \xi=\frac{H(x,y)}{H_1(x,y)}, \quad \eta=\frac{K(x,y)}{K_1(x,y)}.$$

Diese Formeln schreiben wir auch so, daß wir die darin vorkommenden Funktionen in Primteiler zerlegt denken:

$$(20.) \qquad x=\frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}_1'}, \quad y=\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}_1'},$$

$$(20'.) \qquad \xi=\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_1}, \quad \eta=\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}_1}.$$

Hier sollen $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}_1', \mathfrak{G}', \mathfrak{G}_1', \mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1$ ganze Divisoren bedeuten, von denen die ersten vier nur Primteiler in bezug auf ξ, η, die letzten vier nur Primteiler in bezug auf x, y enthalten.

Wir betrachten die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_m$. Für $\mathfrak{a}_1=0$ werden ξ und η beide konstant. Sie mögen etwa die Werte ξ_0, η_0 annehmen. Unter den Primteilern $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_m$ können außer $\mathfrak{a}_1$ noch andere sein, die, gleich Null gesetzt, ξ, η in ξ_0, η_0 übergehen lassen. Es seien dies etwa die Primteiler $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots \mathfrak{a}_\varrho$. Wir sagen dann, die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_\varrho$ gehören zur Stelle ξ_0, η_0. Nach den Ergebnissen von Nr. V haben wir zur Bestimmung der Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_\varrho$ folgendermaßen zu verfahren, wobei zu bedenken ist, daß für $\mathfrak{a}_i=0$ $(i=1, 2, \dots \varrho)$ x und y nicht beide konstant werden dürfen. Wir setzen

$$\xi-\xi_0=u, \quad \eta-\eta_0=v.$$

Dann möge sich aus (10.) ergeben

$$(21.) \qquad x=\frac{f(u,v)}{f_1(u,v)}, \quad y=\frac{g(u,v)}{g_1(u,v)},$$

wo f, f_1, g, g_1 ganze rationale Funktionen ihrer Argumente sein sollen. Wir betrachten dann die Gleichungen

$$(22.) \qquad f-kf_1=0, \quad g-lg_1=0.$$

Von diesen Gleichungen haben wir diejenigen Wurzeln v, die für $u=0$ verschwinden, nach Potenzen von u zu entwickeln. Dabei ist jede der Entwicklungen so weit fortzusetzen, bis in ihr ein von k oder l abhängiges Glied auftritt. Wir betrachten zunächst die Wurzeln der ersten der Gleichungen (22.). Eine dieser Wurzeln sei

$$(23.) \qquad v=v_1=a_1u^{\varepsilon_1}+a_2u^{\varepsilon_2}+\dots+a_\lambda u^{\varepsilon_\lambda}+\dots.$$

Es sei in dieser Entwicklung a_λ der erste von k abhängige Koeffizient.

Wir setzen dann

$$(24.) \qquad \varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{\alpha},\ v = v_1' = a_1 u^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} + a_2 u^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} + \cdots + a_{\lambda-1} u^{\frac{\alpha_{\lambda-1}}{\alpha}} + t u^{\frac{\alpha_\lambda}{\alpha}}.$$

Hierin sollen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sein, und α soll so klein wie möglich gewählt sein. Die Entwicklung (23.) kann nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreiten, aber das ist nicht notwendig so. Sie kann auch nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\varepsilon}}$ fortschreiten, wo ε ein Vielfaches von α ist.

Durch die Gleichung (24.) ist ein Primteiler, etwa $\mathfrak{a}_1$, definiert. Es sei hier noch einmal angegeben, wie der zugehörige Körper $\bar{\mathfrak{A}}_1$ und wie die Teilbarkeit durch $\mathfrak{a}_1$ definiert ist. Um zu bestimmen, in welche Funktion des Körpers $\bar{\mathfrak{A}}_1$ irgendeine Funktion R des Körpers (ξ, η) für $\mathfrak{a}_1 = 0$ übergeht, hat man in R erst zu setzen $\xi = \xi_0 + u$, $\eta = \eta_0 + v$, dann v durch die Entwicklung (24.) zu ersetzen und nach steigenden Potenzen von u zu entwickeln. Setzt man darauf $u = 0$, so bekommt man die Funktion, in die R für $\mathfrak{a}_1 = 0$ übergeht. Will man sehen, durch welche Potenz von $\mathfrak{a}_1$ eine Funktion R teilbar ist, so hat man genau so zu verfahren wie eben. Beginnt dann die Entwicklung nach steigenden Potenzen von u mit der $\frac{\delta}{\alpha}$-ten Potenz von u, so ist R durch $\mathfrak{a}_1^\delta$ teilbar.

Zu der Entwicklung (24.) gehören noch $\alpha - 1$ konjugierte, die aus ihr dadurch hervorgehen, daß u ein- oder mehreremal den Nullpunkt umläuft. Diese Entwicklungen seien $v_2', v_3', \ldots v_\alpha'$. Jede der Entwicklungen $v = v_2', \ldots v = v_\alpha'$ definiert dann den Primteiler $\mathfrak{a}_1$. Wir setzen

$$(25.) \qquad (v - v_1')(v - v_2') \cdots (v - v_\alpha') = A_1(u, v; t) = A_1(t).$$

Die Gleichung $A_1(u, v; t) = 0$ stellt uns bei festgehaltenem t geometrisch eine Kurve dar. Diese geht durch den Punkt $u = v = 0$, d. h. durch den Punkt ξ_0, η_0. Lassen wir t variieren, so erhalten wir eine ganze Schar von Kurven, die alle durch den Punkt ξ_0, η_0 hindurchgehen. Ist $\mathfrak{P}'$ ein beliebiger Primteiler und schneidet die ihm entsprechende Kurve $\mathfrak{P}'$ die Kurve $A_1 = 0$ im Punkte ξ_0, η_0 in h zusammenfallenden Punkten, und zwar bei beliebigem t, so ist $\mathfrak{P}'$ genau durch $\mathfrak{a}_1^h$ teilbar. Denn aus $A_1 = 0$ folgt für die Umgebung der Stelle $u = v = 0$ nur die eine Entwicklung (24.) und ihre konjugierten. Setzt man eine dieser Entwicklungen in die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}'$ für die Stelle ξ_0, η_0 ein und wird diese dann durch $u^{\frac{h}{\alpha}}$ teilbar, so ist h sowohl die Zahl, die angibt, wieviele Schnittpunkte

$\mathfrak{P}'$ und $A_1=0$ in $u=v=0$ gemeinsam haben, als auch der Exponent der Potenz von $\mathfrak{a}_1$, die in $\mathfrak{P}'$ enthalten ist. Es muß aber t beliebig bleiben. Für bestimmte Zahlenwerte von t kann es eintreten, daß $A_1=0$ und $\mathfrak{P}'$ mehr Schnittpunkte haben als h. Wir sagen also genauer, es ist h die Zahl der Schnittpunkte der Kurve $\mathfrak{P}'$ mit der Kurvenschar $A_1(t)=0$ im Punkte $u=v=0$.

Da die Funktion $A_1(u, v; t)$ im wesentlichen dazu dient, zu bestimmen, durch welche Potenz von $\mathfrak{a}_1$ ein gegebener Primteiler oder Divisor teilbar ist, so nennen wir $A_1(u, v; t)$ die *Eichfunktion* von $\mathfrak{a}_1$.

Unter den Wurzeln von (22.), nämlich von $f-kf_1=0$, kann es solche geben, deren Entwicklung nach steigenden Potenzen von u mit der Entwicklung von v_1 (23.) in den ersten $\lambda-1$ Gliedern übereinstimmt. Unter diesen kann es weiter solche geben, die im λ-ten Gliede dieselbe Potenz von u enthalten und einen von k abhängigen Koeffizienten. Alle diese Entwicklungen führen auf die Entwicklung (24.) und liefern also alle denselben Primteiler $\mathfrak{a}_1$. Die Zahl dieser Entwicklungen sei l_1. Sie seien bezeichnet mit $v_1, v_2, \ldots v_{l_1}$. Diese Entwicklungen und ihre konjugierten, also im ganzen $l_1\alpha$ führen dann auf den Primteiler $\mathfrak{a}_1$.

Wir bilden

$$(v-v_1)(v-v_2)\cdots(v-v_{l_1}). \tag{26.}$$

Dieses Produkt ist eine ganze rationale Funktion von v und eine nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitende Potenzreihe von u. Daß die letztere Aussage richtig ist, bedarf einer kleinen Überlegung, die aber dem Leser wohl kaum Schwierigkeiten machen wird. Die Norm des Produktes (26.) sei für den Augenblick bezeichnet mit $P(u, v)$. Es ist P eine ganze Funktion vom Grade $l_1\alpha$ von v und eine gewöhnliche Potenzreihe von u. Es besteht folgende wichtige Beziehung zwischen P und $A_1(t)$. Ist

$$v_0=b_1u^{\delta_1}+b_2u^{\delta_2}+\cdots$$

eine nach positiven steigenden Potenzen von u fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten von k und t unabhängig sind, so sind

$$P(u, v_0) \quad \text{und} \quad A_1^{h_1}(u, v_0, t)$$

durch dieselbe Potenz von u teilbar. Dies folgt einfach daraus, daß die Entwicklungen der Wurzeln von

$$P(u, v)=0 \quad \text{und} \quad A_1^{k_1}(u, v, t)=0$$

paarweise miteinander in den Anfangsgliedern übereinstimmen, soweit diese nicht von k abhängen.

XI.

Setzen wir $a_1=0$, so werden alle Funktionen des Körpers (ξ, η), soweit sie nicht konstant werden, rationale Funktionen von t. Es fragt sich, ob t selbst eine Funktion des Körpers $\mathfrak{A}_1$ ist, ob also t rational durch ξ, η ausdrückbar ist. Es sei R irgendeine Funktion des Körpers (ξ, η), die für $a_1=0$ nicht konstant wird. Mit Benutzung der Gleichungen $\xi-\xi_0=u$, $\eta-\eta_0=v$ und der Gleichung (24.) ergebe sich

$$R=r(t)+r_1(t)\,u^{\gamma_1}+r_2(t)\,u^{\gamma_2}+\cdots, \tag{27.}$$

wo $0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots$. Für $a_1=0$ wird dann $R=r(t)$. Mit Benutzung von (24.) ergebe sich ferner

$$A_1(u, v_1'; t_1)=u^{\varrho_0}\beta(t)+u^{\varrho_1}\beta_1(t)+\cdots, \tag{28.}$$

wo $0<\varrho_0<\varrho_1<\cdots$ und wo t_1 eine von t verschiedene Veränderliche sein soll. Hierin ist $\beta(t)$ eine ganze rationale Funktion von t. Sie sei vom Grade ε in t. Im allgemeinen wird $\varepsilon=1$ sein. Es ist ε nur dann größer als 1, wenn von den konjugierten Entwicklungen $v_1', v_2', \ldots v_a'$ mehrere bis auf das letzte Glied übereinstimmen. Denn es ist ja

$$A_1(u, v_1'; t_1)=(v_1'(t)-v_1'(t_1))(v_1'(t)-v_2'(t_1))\cdots(v_1'(t)-v_a'(t_1)). \tag{29.}$$

In der Entwicklung von $v_1'(t)-v_1'(t_1)$ nach steigenden Potenzen von u ist der Faktor der niedrigsten Potenz von u eine lineare Funktion von t. In der Entwicklung von $v_1'(t)-v_i'(t)\,(i=2, 3, \ldots \alpha)$ nach steigenden Potenzen von u ist der Faktor der niedrigsten Potenz von u im allgemeinen eine Konstante und dann und nur dann eine Funktion von t, und zwar immer eine lineare, wenn $v_i'(t)$ mit $v_1'(t)$ in den ersten $\lambda-1$ Gliedern übereinstimmt. Es ist daher der Grad der ganzen rationalen Funktion $\beta(t)$ in (28.) gleich ε, wenn unter den Entwicklungen $v_1', v_2', \ldots v_a'$ genau ε vorkommen, die in den ersten $\lambda-1$ Gliedern übereinstimmen. Bedenkt man, daß die Entwicklungen $v_1', v_2', \ldots v_a'$ aus einer von ihnen dadurch erhalten werden können, daß u den Nullpunkt $(\alpha-1)$-mal umkreist, so folgt, daß ε ein Teiler von α sein muß, und daß v_1' für $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\delta$ die Gestalt hat

$$v_1'=a_1 u^{\frac{\delta_1}{\delta}}+a_2 u^{\frac{\delta_2}{\delta}}+\cdots+a_{\lambda-1} u^{\frac{\delta_{\lambda-1}}{\delta}}+t u^{\frac{a_\lambda}{\alpha}}.$$

Die Entwicklungen von $v_2', v_3', \dots v_\varepsilon'$ unterscheiden sich hiervon nur durch das letzte Glied, und wir können sie einfach dadurch erhalten, daß wir in der Entwicklung von v_1 die Größe t ersetzen durch ωt, wo ω eine ε-te Einheitswurzel ist.

Kehren wir zur Funktion R zurück! Nach Gleichung (27.) geht sie für $a_1 = 0$ über in $r(t)$. Die Funktion $r(t)$ bleibt, wie wir jetzt zeigen können, ungeändert, wenn wir t durch ωt ersetzen, wo ω irgendeine ε-te Einheitswurzel ist, d. h. $r(t)$ ist eine ganze rationale Funktion von t^ε. Ersetzen wir nämlich t durch ωt, so geht v_1' in eine der Größen $v_1', \dots v_\varepsilon'$ über, etwa in v_2'. Anstatt also in der Gleichung (27.) t durch ωt zu ersetzen, kann man auch so verfahren, daß man bei der Berechnung der Gleichung (27.) an Stelle von v_1' etwa die Größe v_2' benutzt; d. h. aber nichts anderes als: man erhält dasselbe Resultat, ob man nun in (27.) t durch ωt ersetzt, oder ob man u einen passenden geschlossenen Umlauf um den Nullpunkt machen läßt. Lassen wir aber u irgendeinen geschlossenen Umlauf um den Nullpunkt machen, so bleibt in (27.) $r(t)$ ungeändert. Also muß $r(t)$ auch ungeändert bleiben, wenn wir t durch ωt ersetzen. Damit ist bewiesen, was wir beweisen wollten. Es werden also für $a_1 = 0$ alle Funktionen des Körpers (ξ, η) rationale Funktionen von t^ε. Andererseits können wir eine Funktion bestimmen, die für $a_1 = 0$ in t^ε übergeht, woraus dann folgt, daß t^ε eine Funktion ersten Grades des Körpers $\overline{\mathfrak{A}}_1$ ist. Es ist ja $A_1(t_1)$ eine rationale Funktion von u und v und also auch von ξ, η. Es wird nach (28.) und dem eben Bewiesenen

$$A_1(u, v_1; t_1) = u^{\varrho_0}(t^\varepsilon - t_1^\varepsilon) + u^{\varrho_1}\beta_1(t, t_1) + \cdots$$

und ebenso

$$A_1(u, v_1; t_2) = u^{\varrho_0}(t^\varepsilon - t_2^\varepsilon) + u^{\varrho_1}\beta_1(t, t_2) + \cdots .$$

Also wird für $a_1 = 0$

$$(30.)\quad \lim_{a_1=0} \frac{A_1(u, v; t_1)}{A_1(u, v; t_2)} = \frac{t^\varepsilon - t_1^\varepsilon}{t^\varepsilon - t_2^\varepsilon} \quad \text{und} \quad \lim_{a_1=0} \frac{t_2^\varepsilon A_1(t_1) - t_1^\varepsilon A_2(t_2)}{A_1(t_1) - A_1(t_2)} = t^\varepsilon .$$

XII.

Wir hatten angenommen, daß nicht nur für $a_1 = 0$ die Veränderlichen ξ, η die Werte ξ_0, η_0 annehmen, sondern auch für $a_2 = a_3 = \cdots = a_\varrho = 0$. Wir können für jeden dieser Primteiler dieselben Betrachtungen anstellen wie für a_1. Vor allem gibt es für jeden dieser Primteiler eine Eichfunktion. Wir bezeichnen die von a_i mit

$$A_i(u, v; t) = A_i(t).$$

Ein Resultat aus Nr. X können wir in folgender Weise verallgemeinern. Ist

$$v_0 \equiv b_1 u^{\delta_1} + b_2 u^{\delta_2} + \cdots$$

eine nach steigenden Potenzen von u fortschreitende Entwicklung, deren Koeffizienten von k und t unabhängig sind, so sind bei passender Wahl der Exponenten $l_1, l_2, \ldots l_\varrho$; $m_1, m_2, \ldots m_\varrho$ die Funktionen

(31.) $f(u, v_0) - k f_1(u, v_0)$ und $A_1^{l_1}(u, v_0; t) A_2^{l_2}(u, v_0; t) \cdots A_\varrho^{l_\varrho}(u, v_0; t)$

durch dieselbe Potenz von u teilbar, und ebenso sind die Funktionen

(32.) $g(u, v_0) - l g_1(u, v_0)$ und $A_1^{m_1}(u, v_0; t) A_2^{m_2}(u, v_0; t) \cdots A_\varrho^{m_\varrho}(u, v_0; t)$

durch dieselbe Potenz von u teilbar. Ferner:

Entwickeln wir die Funktionen (31.) und (32.) nach steigenden Potenzen von u, so ist der Faktor der niedrigsten Potenz von u in allen Entwicklungen eine ganze rationale Funktion von t. Der Grad dieser Funktion ist derselbe bei den beiden Funktionen (31.) und ebenso bei den beiden Funktionen (32.) Alle diese Eigenschaften folgen einfach daraus, daß die Entwicklungen der Wurzeln v der Gleichungen

$$f(u, v) - k f_1(u, v) = 0, \quad A_1^{l_1}(u, v) A_2^{l_2}(u, v) \cdots A_\varrho^{l_\varrho}(u, v) = 0$$

in der Umgebung der Stelle $u = 0$ in den Anfangsgliedern, soweit sie von k und t unabhängig sind, paarweise übereinstimmen, und daß immer je zwei in den Anfangsgliedern übereinstimmende Entwicklungen im ersten von k und t abhängigen Gliede die gleiche Potenz von u enthalten. Das gilt auch von den Wurzeln der Gleichungen

$$g(u, v) - l g_1(u, v) = 0, \quad A_1^{m_1}(u, v) A_2^{m_2}(u, v) \cdots A_\varrho^{m_\varrho}(u, v) = 0$$

bei passender Wahl der m_i.

Von den Exponenten $l_1, l_2, \ldots l_\varrho$, $m_1, m_2, \ldots m_\varrho$ können einige gleich Null sein. Aus den Untersuchungen von Nr. X folgt: l_i ist dann und nur dann gleich Null, wenn x für $a_i = 0$ konstant wird, und ebenso ist m_i dann und nur dann gleich Null, wenn y für $a_i = 0$ konstant wird. Da für $a_i = 0$ nicht gleichzeitig x und y konstant werden, so kann für kein $i \leqq \varrho$ gleichzeitig $l_i = m_i = 0$ sein.

Die Zahlen $l_1, l_2, \ldots l_\varrho$ und $m_1, m_2, \ldots m_\varrho$ haben eine einfache Bedeutung, wie wir jetzt zeigen wollen. Es ist

(33.) $$\frac{x - k}{x - k'} = \frac{f(u, v) - k f_1(u, v)}{f(u, v) - k' f_1(u, v)}.$$

Wir wollen den Zähler von $\frac{x-k}{x-k'}$ in bezug auf x, y mit $\mathfrak{L}_1$ bezeichnen. Wir hatten früher den Nenner von x mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Da

$$\frac{x-k}{x} = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}},$$

so ist $\mathfrak{L}_1$ äquivalent zu $\mathfrak{L}$. Es ist daher

$$(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{L}_1).$$

Es gibt $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}_1)$ die Zahl der den Kurven $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{L}_1$ gemeinsamen Punkte an. $\mathfrak{A}_1$ ist eine Kurve vom Geschlechte 0. Wir benutzen die Bezeichnung von Nr. XI. Danach ist t^ε eine Funktion ersten Grades des Körpers $\mathfrak{A}_1$, und um zu bestimmen, wie groß $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}_1)$ ist, haben wir zu bestimmen, für wieviel Werte von t^ε $\mathfrak{L}_1$ oder $\frac{x-k}{x-k'}$ Null wird. Um zu sehen, was für $\mathfrak{A}_1 = 0$ aus $\frac{x-k}{x-k'}$ wird, können wir auch den Wert aufsuchen, den die rechte Seite der Gleichung (33.) für $\mathfrak{a}_1 = 0$ annimmt. Dazu haben wir zunächst zu bilden

$$\text{(34.)} \qquad \frac{f(u, v_1') - k f_1(u, v_1')}{f(u, v_1') - k' f_1(u, v_1')},$$

wo v_1' die $\mathfrak{a}_1$ definierende Funktion ist, nämlich

$$v_1' = a_1 u^{\frac{a_1}{a}} + a_2 u^{\frac{a_2}{a}} + \cdots + a_{\lambda-1} u^{\frac{a_{\lambda-1}}{a}} + t u^{\frac{a_\lambda}{a}}.$$

Nach dem Anfang dieser Nummer können wir für unsere Untersuchungen den Quotienten (34.) ersetzen durch

$$\text{(35.)} \qquad \frac{A_1^{l_1}(u, v_1'; t_1) \cdots A_\varrho^{l_\varrho}(u, v_1'; t_1)}{A_1^{l_1}(u, v_1'; t_2) \cdots A_\varrho^{l_\varrho}(u, v_1'; t_2)},$$

wo t_1, t_2 voneinander und von t unabhängige Veränderliche bedeuten sollen Nach Nr. XII (30.) ist

$$\lim_{u=0} \frac{A_1(u, v_1'; t_1)}{A_1(u, v_1'; t_2)} = \text{konst} \cdot \frac{t^\varepsilon - t_1^\varepsilon}{t^\varepsilon - t_2^\varepsilon}.$$

Ist v_1'' die $\mathfrak{a}_2$ definierende Funktion und etwa

$$v_1'' = b_1 u^{\frac{\beta_1}{\beta}} + b_2 u^{\frac{\beta_2}{\beta}} + \cdots + b_{\mu-1} u^{\frac{\beta_{\mu-1}}{\beta}} + t v^{\frac{\beta_\mu}{\beta}},$$

so ist

$$A_2(u, v; t) \equiv \text{Norm}\,(v - v_1'') = (v - v_1'')(v - v_2'') \cdots (v - v_\beta'').$$

Es muß aber v_1'' von v_1' verschieden sein. Daher hat $v_1'(t) - v_i''(t_1)$ entweder die Form

$$v_1'(t) - v_i''(t_1) = c_0 u^{\delta_0} + c_1 v^{\delta_1} + c_2 v^{\delta_2} + \cdots,$$

wo c_0 von t unabhängig ist und die $\delta_0 < \delta_1 < \delta_2 \cdots$ positive rationale Zahlen

sind, oder es ist

$$v_1'(t)-v_i''(t_1)=\gamma_0 t u^{\tau_0}+\gamma_1 v^{\tau_1}+\gamma_2 v^{\tau_2}+\cdots,$$

wo γ_0 von t unabhängig ist, und wo die $\tau<\tau_1<\tau_2\cdots$ positive rationale Zahlen sind. Daraus folgt, daß auf jeden Fall

$$\lim_{u=0}\frac{A_2(u,v_1';t_1)}{A_2(u,v_1';t_2)}$$

gleich einer von t unabhängigen Konstanten ist. Entsprechendes gilt dann auch für die anderen in (35.) vorkommenden Quotienten

$$\frac{A_i(u,v_1';t_1)}{A_i(u,v_1';t_2)}. \qquad (i\geqq 2)$$

Es wird daher für $u=0$ der Quotient (35.) übergehen in

$$\text{konst}\cdot\left(\frac{t^\varepsilon-t_1^\varepsilon}{t^\varepsilon-t_2^\varepsilon}\right)^{l_1},$$

d. h. er wird eine rationale Funktion der Ordnung l_1 von t^ε. Es wird also $\mathfrak{L}_1$ für l_1 Werte von t^ε gleich Null, oder es ist

$$(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L}_1)=l_1.$$

Damit ist dann gezeigt, daß

$$l_1=(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L}),$$

weil $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}$ äquivalent sind. Ebenso folgt allgemeiner

(36.) $$l_i=(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{L}), \qquad m_i=(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{M}).$$

Auf einen Fall ist noch besonders hinzuweisen. Wir hätten auch so schließen können: Für $\mathfrak{A}_1=0$ wird x eine rationale Funktion der Ordnung l_1 von t^ε und y eine rationale Funktion der Ordnung m_1 von t^ε. Da t^ε selbst dem Körper $\mathfrak{A}_1$ angehört, so ist danach die Gleichung, die durch Elimination von t^ε entsteht in x vom Grade m_1 und in y vom Grade l_1, das heißt, es bestehen die Gleichungen (36.). Bei dieser Schlußweise erkennen wir aber gleich einen besonderen Fall. Es kann nämlich eintreten, daß die Gleichung $A_1(x,y)=0$, die den Körper $\mathfrak{A}_1$ definiert x oder y gar nicht enthält, daß also m_1 oder l_1 gleich Null sind. Ist z. B. $m_1=0$, so ist für $\mathfrak{A}_1=0$ die Größe $y=$konst, etwa gleich y_0. Damit die Gleichungen (36.) unbeschränkt gültig bleiben, müssen wir in diesem Falle die Gleichung $A_1(x,y)=0$ in der Form annehmen

$$A_1(x,y)\equiv(y-y_0)^{l_1}=0,$$

wir müssen also die Fundamentalkurve $\mathfrak{A}_1$ aus der l_1-mal zu zählenden Kurve $y=y_0$ bestehen lassen. Es ist also in diesem Falle $\mathfrak{A}_1$ kein Primteiler, sondern der Zähler von $(y-y_0)^{l_1}$, also die l_1-te Potenz eines Prim-

teilers. Entsprechendes gilt, wenn $l_1 = 0$ ist. Tritt dieser Fall ein, so ist es immer möglich, die Zahlen l_1 und m_1 nach den allgemein angegebenen Methoden zu bestimmen.

XIII.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art in bezug auf x, y. Durch den Übergang von x, y zu ξ, η geht $\mathfrak{Q}$ über in einen Divisor, der zum Teil aus Primteilern erster Art in bezug auf ξ, η, zum Teil aus solchen zweiter Art in bezug auf ξ, η bestehen wird. Es werde

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}^*}{\mathfrak{q}'},$$

wo $\mathfrak{Q}^*$ ein Divisor erster Art und $\mathfrak{q}'$ ein Divisor zweiter Art in bezug auf ξ, η sein möge. Es sei

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}_1^{\gamma_1} \mathfrak{a}_2^{\gamma_2} \cdots \mathfrak{a}_m^{\gamma_m}.$$

Es entsteht die Aufgabe, die Exponenten γ_i zu bestimmen, wenn $\mathfrak{Q}$ gegeben ist.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Primteiler. $\mathfrak{Q}^*$ ist dann ein ganzer Divisor. Wir deuten $\mathfrak{Q}$ als Kurve in der xy-Ebene und $\mathfrak{Q}^*$ als Kurve in der $\xi\eta$-Ebene. Geht $\mathfrak{Q}$ durch keinen Fundamentalpunkt, so ist $\mathfrak{Q}^*$ auch ein Primteiler, und die Kurve $\mathfrak{Q}^*$ zerfällt nicht. Geht aber $\mathfrak{Q}$ durch Fundamentalpunkte, so besteht $\mathfrak{Q}^*$ aus einem Primteiler $\mathfrak{Q}'$ und aus singulären Primteilern $\mathfrak{B}_i$; die Kurve $\mathfrak{Q}^*$ zerfällt dann in die Kurve $\mathfrak{Q}'$ und in unter Umständen mehrfach zu zählende Fundamentalkurven. Bei der Transformation gehen alle Punkte der Fundamentalkurven

(37.) $$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\varrho$$

über in den einen Fundamentalpunkt ξ_0, η_0, zu dem die Divisoren

(38.) $$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\varrho$$

gehören. Würde also $\mathfrak{Q}$ keine der Fundamentalkurven (37.) schneiden, so würde auch kein Punkt von $\mathfrak{Q}$ in den Punkt ξ_0, η_0 übergehen können, es würde also $\mathfrak{Q}^*$ durch keinen der Primteiler (38.) teilbar sein. Schneidet dagegen $\mathfrak{Q}$ eine oder mehrere der Fundamentalkurven (37.), so werden die Schnittpunkte in ξ_0, η_0 transformiert. Es geht dann $\mathfrak{Q}^*$ durch ξ_0, η_0, und $\mathfrak{Q}^*$ wird durch die Primteiler (38.) teilbar; und zwar wird $\mathfrak{Q}^*$ durch um so höhere Potenzen der Primteiler (38.) teilbar sein, je größer die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{Q}$ mit den Fundamentalkurven (37.) ist. Diese Überlegung finden wir durch den am Ende von Nr. XIV angegebenen Satz bestätigt.

Unsere Aufgabe läßt sich sogleich vereinfachen. Ist nämlich der Divisor $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung (a,b), so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{-a}\mathfrak{M}^{-b}$ eine rationale Funktion von x,y, oder es ist

$$\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{L}^a \mathfrak{M}^b .$$

Aber wir haben in Nr. VIII gesehen, daß äquivalente Divisoren bei der Transformation wieder in äquivalente Divisoren übergehen. Aber äquivalente Divisoren enthalten dieselben Primteiler zweiter Art und zwar in derselben Potenz. An Stelle von $\mathfrak{Q}$ können wir daher auch den Divisor $\mathfrak{L}^a\mathfrak{M}^b$ unserer Betrachtung zugrunde legen. Wir bekommen für die Exponenten γ_i dieselben Werte; dann aber zerfällt unsere Aufgabe naturgemäß in die beiden Aufgaben, zu bestimmen, durch welche Potenzen von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ die beiden Divisoren teilbar sind, in die bei dem Übergang von x,y zu ξ,η die beiden Divisoren $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ übergehen. Statt $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ können wir dann wieder Divisoren nehmen, die ihnen äquivalent sind. Wir nehmen statt $\mathfrak{L}$ den schon in der vorigen Nummer benutzten Divisor $\mathfrak{L}_1$, nämlich den Zähler von $x-k$.

Man kann k immer so wählen, daß $\mathfrak{L}_1$ durch keinen Primteiler zweiter Art in bezug auf x,y teilbar ist. Es ist dann $s(\mathfrak{L}_1)=1$. Nun ist

$$x-k = \frac{F(\xi,\eta)-kF_1(\xi,\eta)}{F_1(\xi,\eta)} .$$

Daher entspricht dem Zähler von $x-k$, abgesehen von den singulären Primteilern, der Zähler von $F(\xi,\eta)-kF_1(\xi,\eta)$. Wir können k weiter so gewählt annehmen, daß dieser Zähler ein Primteiler ist. Die Funktion $F-kF_1$ kann nämlich nur dann für beliebige Werte von k in Faktoren zerfallen, wenn F und F_1 einen gemeinsamen Faktor haben, was wir ausschließen können. Nach den Festsetzungen, die wir über die Beziehung der Primteiler und der zugehörigen Körper gemacht haben, ist der durch $x-k=0$ oder durch $F-kF_1=0$ definierte algebraische Körper mit $\overline{\mathfrak{L}}_1$ zu bezeichnen und der Zähler von $F-kF_1$ mit $\mathfrak{L}_1'$. Da wir k so gewählt annehmen, daß $s(\mathfrak{L}_1)=1$ ist, so besteht die Gleichung

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{\mathfrak{L}_1'}{s(\mathfrak{L}_1')} . \tag{39.}$$

Es sei

$$s(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\sigma_m} . \tag{40.}$$

Es handelt sich um die Bestimmung der Exponenten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$.

Wir beschränken uns zunächst auf diejenigen Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$, die gleich Null gesetzt ξ, η in ξ_0, η_0 übergehen lassen, d. h. wieder auf die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\varrho$. · Setzen wir wieder $\xi - \xi_0 = u$, $\eta - \eta_0 = v$ und wenden die früheren Bezeichnungen an, so ist die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{L}_1'$ für die Stelle ξ_0, η_0 die Funktion

$$Z(\mathfrak{L}_1') \equiv f(u,v) - k f_1(u,v).$$

Um zu sehen, welche Potenz von $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{L}_1'$ enthalten ist, haben wir in $Z(\mathfrak{L}_1')$ statt v eine der für $u=0$ verschwindenden Wurzeln der Eichfunktion $A_1(t)$ von $\mathfrak{a}_1$ einzusetzen und nach steigenden Potenzen von u zu ordnen. Enthält dann das Anfangsglied die σ_1-te Potenz von $u^{\frac{1}{a}}$, so ist $\mathfrak{L}_1'$ teilbar durch $\mathfrak{a}_1^{\sigma_1}$ oder mit anderen Worten, es enthält $s(\mathfrak{L}_1')$ den Faktor $\mathfrak{a}_1^{\sigma_1}$.

Wir wissen aber, daß wir $f - k f_1$ ersetzen können durch

$$A_1^{l_1}(t_1)\, A_2^{l_2}(t_1) \cdots A_\varrho^{l_\varrho}(t_1), \tag{41.}$$

wenn es sich wie hier nur darum handelt festzustellen, durch welche Potenz von u $f - k f_1$ teilbar wird, falls wir v durch eine Potenzreihe von u ersetzen.

Es bedeute allgemein $v^{(i)}$ die $\mathfrak{a}_i$ definierende Entwicklung. Sie schreite nach Potenzen von $u^{\frac{1}{\varkappa_i}}$ fort. Der Exponent der Anfangspotenz von $u^{\frac{1}{\varkappa_i}}$ in der Entwicklung von $A_n(u, v^{(i)}; t_1)$ nach steigenden Potenzen von $u^{\frac{1}{\varkappa_i}}$ soll bezeichnet werden mit

$$[i,n]. \qquad (i,n = 1,2,\ldots\varrho)$$

Die Definition von $[i,n]$ können wir etwas kürzer auch so geben: $A_n(u,v;t_1)$ ist eine ganze rationale (irreduktible) Funktion von u, v und kann aufgefaßt werden als zugeordnete Funktion eines gewissen Primteilers. Dieser Primteiler ist genau teilbar durch die $[i,n]$-te Potenz von $\mathfrak{a}_i$. Oder noch kürzer: $[i,n]$ ist die Zahl der im Punkte $u = v = 0$ zusammenfallenden Schnittpunkte der beiden Kurven $A_i(u,v;t_1) = 0$ und $A_n(u,v;t_2) = 0$ bei beliebigen Werten von t_1, t_2. Die so definierten ganzen Zahlen $[i,n]$ genügen den Gleichungen

$$[i,n] = [n,i], \tag{42.}$$

wie aus der zuletzt gegebenen Definition folgt.

Hiermit ist ein symmetrisches System von ϱ^2 Größen $[i,n]$ definiert.

Mit Benutzung dieser Größen lassen sich die Exponenten σ_i der in $\mathfrak{L}_1'$ enthaltenen Potenzen von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\varrho$ einfach darstellen. Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{L}_1'$ für die Stelle ξ_0, η_0 ist $f(u,v) - k f_1(u,v)$, und dafür könnten wir die Funktion (41.) nehmen. Da aber $A_1(t_1)$ durch $\mathfrak{a}_k^{[k,i]}$ teilbar ist, so folgt

(43.) $$\sigma_k = l_1[k,1] + l_2[k,2] + \cdots + l_\varrho[k,\varrho].$$

Da die Primteiler, die zu $A_n(t_1)$ $(n=1,2,\ldots\varrho)$ als zugeordnete Funktionen gehören, durch $\mathfrak{a}_{\varrho+1}, \mathfrak{a}_{\varrho+2}, \ldots \mathfrak{a}_m$ nicht teilbar sind, so werden wir setzen $[i,n]=0$, wenn $i>\varrho$, $n \leqq \varrho$. Damit ist dann eine Matrix von $m \cdot \varrho$ Größen $[i,n]$ definiert. Wie wir mit denjenigen der Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ verfahren sind, die zum Fundamentalpunkt ξ_0, η_0 gehören, können wir natürlich auch mit den anderen der Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ verfahren. Wir bekommen dann ein System von m^2 Größen $[i,n]$ $(i,n=1,2,\ldots m)$. Dieses System zerfällt in soviele quadratische Einzelsysteme, als es Fundamentalpunkte im Gebiet der Veränderlichen ξ, η gibt. Alle anderen Zahlen in der Matrix sind gleich Null. Die Determinante des Systems von m^2 Größen zerfällt daher in das Produkt von kleineren Determinanten, von denen eine die Determinante der ϱ^2 Größen $[i,n]$ $(i,n=1,2,\ldots\varrho)$ ist. Um also nachzuweisen, daß die Determinante m-ten Grades

(44.) $$|[i,n]| \qquad (i,n=1,2,\ldots m)$$

nicht gleich Null ist, genügt es nachzuweisen, daß die Determinante ϱ-ten Grades

(45.) $$|[i,n]| \qquad (i,n=1,2,\ldots\varrho)$$

von Null verschieden ist. Denn dasselbe gilt dann von allen anderen Teildeterminanten. Den Nachweis, daß die Determinante ϱ-ten Grades (45.) nicht gleich Null ist, führen wir indirekt. Wir nehmen an, es sei diese Determinante gleich Null. Dann existieren Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_\varrho$, die wir als ganze Zahlen annehmen können und wollen und die nicht alle verschwinden, von der Art, daß

$$e_1[1,i] + e_2[2,i] + \cdots + e_\varrho[\varrho,i] = 0. \qquad (i=1,2,\ldots\varrho)$$

Daraus folgt dann, daß die rationale Funktion von u und v

$$R(u,v) = A_1^{l_1}(t_1) A_2^{l_2}(t_1) \cdots A_\varrho^{l_\varrho}(t_1)$$

für $\mathfrak{a}_1 = 0, \mathfrak{a}_2 = 0, \ldots \mathfrak{a}_\varrho = 0$ einen von Null und Unendlich verschiedenen Wert annimmt. Wir können noch weiter sagen, daß sowohl für $\mathfrak{a}_1 = 0$ als auch für $\mathfrak{a}_2 = 0, \mathfrak{a}_3 = 0, \cdots \mathfrak{a}_\varrho = 0$ $R(u,v)$ nicht konstant wird, sondern von dem jedes-

maligen Parameter t abhängt, falls nicht etwa das betreffende e_i den Wert Null hat. Um z. B. zu bestimmen, was aus R wird für $\mathfrak{a}_1 = 0$, haben wir zunächst $R(u, v_1')$ zu bilden, wo v_1' die $\mathfrak{a}_1$ definierende Entwicklung ist, und dann $\lim_{u=0} R(u, v_1')$ zu berechnen. Es wird aber (vgl. Seite 279)

$$A_1(u, v_1'; t_1) = \text{konst} \cdot u^{\tau_1}(t^{\varepsilon} - t_1^{\varepsilon}) + \cdots,$$

während für $i > 1$

$$A_i(u, v_1'; t_1) = \text{konst} \cdot u^{\tau_i} t^{\delta} + \cdots,$$

wo $\delta = 0$ oder $\delta = 1$. Ist also $e_1 \neq 0$, so liefert bis auf einen konstanten Faktor $A_1^{l_1}(t_1)$ zu $\lim_{u=0} R$ den Beitrag $(t^{\varepsilon} - t_1^{\varepsilon})$, und dies kann sich gegen die Beiträge, die die anderen $A_i^{l_i}(t_1)$ liefern, nicht fortheben, da diese Beiträge bis auf konstante Faktoren die Form haben $t^{\delta l_i}$.

Aus der hiermit hergeleiteten Eigenschaft der Funktion $R(u, v)$ können wir nachweisen, daß sie nicht existieren kann, womit dann gezeigt ist, daß die Determinante $|[i, n]|$ von Null verschieden ist.

Wir schreiben R in der Form

$$R = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)},$$

wo P und Q zueinander teilerfremde ganze rationale Funktionen von u, v sein sollen. Von den Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_\varrho$ können einige gleich Null sein. Es seien etwa $e_1, e_2, \ldots e_\sigma$ von Null verschieden, während die übrigen Null sein mögen. Da R für $\mathfrak{a}_1 = 0$ nicht konstant wird, so gilt nach den Entwicklungen von Nr. V folgendes: Die Gleichung

$$P(u, v) - kQ(u, v)$$

hat eine Wurzel, etwa v_1, die mit der $\mathfrak{a}_1$ definierenden Entwicklung

$$v_1' = a_1 u^{\frac{a_1}{a}} + a_2 u^{\frac{a_2}{a}} + \cdots + a_{\lambda-1} u^{\frac{a_{\lambda-1}}{a}} + t u^{\frac{a_\lambda}{a}}$$

in den ersten $\lambda - 1$ Gliedern vollständig und im λ-ten bis auf den Koeffizienten übereinstimmt; d. h. die Entwicklung von v_1 sieht so aus:

$$v_1 = a_1 u^{\frac{a_1}{a}} + \cdots + a_{\lambda-1} u^{\frac{a_{\lambda-1}}{a}} + a_\lambda u^{\frac{a_\lambda}{a}} + \cdots . \tag{46.}$$

Wollen wir den Koeffizienten von a_λ in dieser Gleichung bestimmen, so müssen wir in die Funktion $P(u, v) - kQ(u, v)$ die Entwicklung für v_1 mit zunächst noch unbestimmtem a_λ einführen und nach Potenzen von u ordnen. Nach den Untersuchungen der Nr. V ist der Koeffizient des Anfangsgliedes dieser Entwicklung von der Form

$$p(a_\lambda) - k q(a_\lambda),$$

wo $p(a_\lambda)$ und $q(a_\lambda)$ sicher beide von Null verschieden sind. Wir bekommen aber dasselbe Anfangsglied, wenn wir in $P-kQ$ statt v_1 die Entwicklung von v_1' einführen, nachdem wir in ihr t durch a_λ ersetzt haben. Ist e_1 etwa positiv, so enthält $P(u,v)$ die e_1-te Potenz von $A_1(u,v;t_1)$. Aber wir haben auf der vorigen Seite gesehen, daß A_1 zu dem Koeffizienten $p(a_\lambda)$ des Anfangsgliedes von $P(u,v)$ bis auf einen konstanten Faktor den Faktor $a_\lambda^\varepsilon - t_1^\varepsilon$ beisteuert, also $A_1^{e_1}$ den Faktor $(a_\lambda^\varepsilon - t_1^\varepsilon)^{e_1}$. Dagegen liefern die anderen in P enthaltenen A_i zu $p(a_\lambda)$ und ebenso die in Q enthaltenen A_i zu $q(a_\lambda)$ Faktoren von der Form konst$\cdot a_\lambda^\tau$. Daher ist $p(a_\lambda)-kq(a_\lambda)$ selbst nach Abspaltung aller etwa vorhandenen von k unabhängigen Faktoren immer noch eine ganze rationale Funktion von a_λ mindestens vom Grade $e_1\varepsilon$, also auch mindestens vom Grade e_1. Nun muß aber a_λ aus der Gleichung $p(a_\lambda)-kq(a_\lambda)=0$ bestimmt werden. Und jede Wurzel dieser Gleichung, die von Null verschieden ist und von k wirklich abhängt, liefert eine Wurzel der Form

$$v_1 = a_1 u^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} + \cdots + a_{\lambda-1} u^{\frac{\alpha_{\lambda-1}}{\alpha}} + a_\lambda u^{\frac{\alpha_\lambda}{\alpha}} + \cdots .$$

Solcher Wurzeln der Gleichung $P(u,v)-kQ(u,v)=0$ bekommen wir also mindestens e_1. Berücksichtigen wir noch, daß die Entwicklung von v_1 nach Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, so haben wir im ganzen $e_1\alpha$ Wurzeln der Gleichung $P-kQ=0$, die der den Primteiler $\mathfrak{a}_1$ definierenden Entwicklung entsprechen, d. h. soviele als der Grad von $A_1^{e_1}$ in v beträgt. Da für die anderen Primteiler $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_\sigma$ dasselbe gilt, so muß die Gleichung $P(u,v) - kQ(u,v)=0$, mindestens soviele Wurzeln v haben, die für $u=0$ verschwinden, als der Grad von $A_1^{|e_1|} A_2^{|e_2|} \cdots A_\sigma^{|e_\sigma|} = P(u,v)\cdot Q(u,v)$ in v beträgt. Das aber ist nicht möglich. Unsere Annahme ist also falsch, die Determinante $|[i,n]|$ ist wirklich von Null verschieden.

XIV.

Wir hatten den Zähler von $x-k$ mit $\mathfrak{L}_1$ bezeichnet und k so gewählt, daß $s(\mathfrak{L}_1)=1$ wird. Wird bei dem Übergang von x,y zu ξ,η

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{\mathfrak{L}_1'}{s(\mathfrak{L}_1')}$$

und setzen wir

$$s(\mathfrak{L}_1') = \mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\sigma_m},$$

so hatten wir gefunden (Nr. XIII (43.))

$$\sigma_i = l_1[1,i] + l_2[2,i] + \cdots + l_\varrho[\varrho,i]. \qquad (i=1,2,\ldots\varrho)$$

Diese Gleichung können wir auch so schreiben:

(47.) $$\sigma_i = l_1[1,i] + l_2[2,i] + \cdots + l_m[m,i], \qquad (i=1,2,\ldots\varrho)$$

weil die letzten $m-\varrho$ Größen $[k,i]$ in dieser Gleichung nach Definition gleich Null sind. Nach Analogie folgt ohne weiteres, daß wir die Gleichung (47.) anwenden dürfen für $i=1,2,\ldots m$. Die Zahlen $l_1, l_2, \ldots l_m$ haben aber nach Nr. XIII folgende einfache Bedeutung:

$$l_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{L}_1) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{L}).$$

Also wird

(48.) $$\sigma_i = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})[1,i] + (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{L})[2,i] + \cdots + (\mathfrak{A}_m, \mathfrak{L})[m,i].$$

Berücksichtigen wir die Bemerkungen im Anfang von Nr. XIII und bedenken, daß wir für $\mathfrak{M}$ dieselbe Untersuchung ausführen könnten wie für $\mathfrak{L}$, so folgt:

Wird bei dem Übergang von x,y zu ξ,η

(49.) $$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{L}^*}{\mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\sigma_m}}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{a}_1^{\tau_1}\mathfrak{a}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\tau_m}},$$

wo $\mathfrak{L}^*$ und $\mathfrak{M}^*$ Divisoren erster Art in bezug auf ξ,η sein sollen, so ist

(50.) $$\begin{cases} \sigma_i = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})[1,i] + (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{L})[2,i] + \cdots + (\mathfrak{A}_m, \mathfrak{L})[m,i], \\ \tau_i = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{M})[1,i] + (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M})[2,i] + \cdots + (\mathfrak{A}_m, \mathfrak{M})[m,i]. \end{cases}$$

Ist weiter $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor von der Ordnung (a,b) erster Art in bezug auf x,y, ist also $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{L}^a\mathfrak{M}^b$, und ist bei dem Übergang von $x,,y$ zu ξ,η

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}^*}{\mathfrak{a}_1^{\gamma_1}\mathfrak{a}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\gamma_m}},$$

so ist nach den Bemerkungen im Anfang von Nr. XIII

$$\gamma_i = a\sigma_i + b\tau_i.$$

Benutzt man die Gleichungen

$$a(\mathfrak{A}_a, \mathfrak{L}) + b(\mathfrak{A}_a, \mathfrak{M}) = (\mathfrak{A}_a, \mathfrak{L}^a\mathfrak{M}^b) = (\mathfrak{A}_a, \mathfrak{Q}),$$

so haben wir den Satz:

Ist $\mathfrak{Q}$ irgendein Divisor erster Art in bezug auf x,y und wird beim Übergang von x,y zu ξ,η

(51.) $$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}^*}{\mathfrak{a}_1^{\gamma_1}\mathfrak{a}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\gamma_m}},$$

wo $\mathfrak{Q}^*$ ein Divisor erster Art in bezug auf ξ,η sein soll, so ist

(52.) $$\gamma_i = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{Q})[1,i] + (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{Q})[2,i] + \cdots + (\mathfrak{A}_m, \mathfrak{Q})[m,i]. \qquad (i=1,2,\ldots m)$$

Dabei bedeutet $[i,k]$, wenn $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu demselben Fundamentalpunkt ge-

hören, die Zahl der in diesem Punkte zusammenfallenden Schnittpunkte der Eichfunktionen $A_i(t_1)$ und $A_k(t_2)$ von $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$. Wenn aber $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu verschiedenen Fundamentalpunkten gehören, so ist $[i,k]=0$. Die Determinante der $[i,k]$ ist von Null verschieden.

XV.

Da die Determinante des Systems $([i,k])$ von m^2 Elementen von Null verschieden ist, so können wir die Gleichungen (50.) der Nr. XIV nach den $(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{L})$ und $(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{M})$ auflösen. Wir bezeichnen das reziproke System von $([i,k])$ mit $((i,k))$. Dann folgt aus der Gleichung (50.)

$$(53.)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}_i,\mathfrak{L})=(1,i)\,\sigma_1+(2,i)\,\sigma_2+\cdots+(m,i)\,\sigma_m, \\ (\mathfrak{A}_i,\mathfrak{M})=(1,i)\,\tau_1+(2,i)\,\tau_2+\cdots+(m,i)\,\tau_m. \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots m)$$

Diese Gleichungen führen nun dazu, die Symbole $(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_k)$ zu definieren. Wir erinnern an die Festsetzungen in Nr. IX. Danach ist

$$(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{L})=\Big(\frac{\mathfrak{A}_i}{s\,\mathfrak{A}_i},\mathfrak{L}\Big),$$

weil nämlich $s\mathfrak{A}_i$ nur Primteiler zweiter Art enthält und immer $(b_a,\mathfrak{P})=0$ ist, wenn $\mathfrak{P}$ ein Divisor erster Art ist. Aber es ist

$$\frac{\mathfrak{A}_i}{s\,\mathfrak{A}_i}=\mathfrak{a}_i,\quad \mathfrak{L}=\mathfrak{L}^*\,\mathfrak{a}_1^{-\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{-\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{-\sigma_m},$$

wo $\mathfrak{L}^*$ einen Divisor erster Art in bezug auf ξ,η bedeutet. Nehmen wir an, die $(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_k)$ seien so bestimmt, wie wir sie bestimmen wollen, nämlich so, daß $(\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2)$ bei beliebigen Divisoren $\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2$ sich nicht ändert, wenn man $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ durch ihre transformierten Divisoren ersetzt, so besteht die Gleichung

$$(54.)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}_i,\mathfrak{L})=\Big(\dfrac{\mathfrak{A}_i}{s\,\mathfrak{A}_i},\mathfrak{L}\Big)=(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{L}^*\,\mathfrak{a}_1^{-\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{-\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{-\sigma_m}), \\ (\mathfrak{A}_i,\mathfrak{L})=-\sigma_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_i)-\sigma_2(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_i)-\cdots-\sigma_m(\mathfrak{a}_m,\mathfrak{a}_i). \end{cases}$$

Ebenso würde sich ergeben

$$(55.)\qquad (\mathfrak{A}_i,\mathfrak{M})=-\tau_i(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_i)-\tau_2(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_i)-\cdots-\tau_m(\mathfrak{a}_m,\mathfrak{a}_i).$$

Vergleichen wir die beiden letzten Gleichungen mit den Gleichungen (53.), so werden wir dazu geführt, die Symbole $(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_k)$ in folgender Weise zu definieren

$$(56.)\qquad (\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_k)=-(i,k).$$

Und wir wollen das in der Tat tun. Da das System $([i,k])$ symmetrisch ist, und daher auch das System $((i,k))$, so ist auch das System $((a_i,a_k))$ symmetrisch. Es bestehen also die Gleichungen

(57.) $$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_i).$$

Außerdem bestehen die Gleichungen (54.) und (55.), die wir jetzt so schreiben können

(58.) $$\begin{cases} (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{L}) = -[\sigma_1(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_1) + \sigma_2(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_2) + \cdots + \sigma_m(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_m)], \\ (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{M}) = -[\tau_1(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_1) + \tau_2(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_2) + \cdots + \tau_m(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_m)]. \end{cases}$$

Wie wir mit den Primteilern zweiter Art in bezug auf ξ, η, nämlich $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ verfahren sind, können wir auch mit den Primteilern zweiter Art in bezug auf x, y, nämlich $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_m$ verfahren. Wir bekommen dann natürlich ganz ähnliche Resultate. Wir können erst die den Funktionen $A_i(u, v; t)$ entsprechenden Funktionen definieren, die wir mit $B_i(u, v; t)$ oder $B_i(t)$ bezeichnen. Dann können wir die den Größen $[i, k]$ entsprechenden Größen definieren, die wir mit $[i, k]'$ bezeichnen. Das reziproke System zu dem System $([i, k]')$ bezeichnen wir mit $((i, k)')$ und wir setzen dann entsprechend Gleichung (56.)

(59.) $$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = -(i, k)'.$$

Es gilt dann zunächst die Gleichung

(60.) $$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = (\mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}_i).$$

Wir bezeichnen den Nenner von ξ mit A', den von η mit M', wo A' und M' Divisoren erster Art in bezug auf ξ, η sein sollen. Es mögen für den Übergang von ξ, η zu x, y die Gleichungen gelten

(61.) $$A' = A^* \mathfrak{b}_1^{-\sigma'_1} \mathfrak{b}_2^{-\sigma'_2} \cdots \mathfrak{b}_m^{-\sigma'_m}, \quad M' = M^* \mathfrak{b}_1^{-\tau'_1} \mathfrak{b}_2^{-\tau'_2} \cdots \mathfrak{b}_m^{-\tau'_m},$$

wo A^* und M^* Divisoren erster Art in bezug auf x, y sein sollen. Dann bestehen die Gleichungen

(62.) $$\begin{cases} (\mathfrak{B}_i, A') = -[\sigma'_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_i) + \sigma'_2(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_i) + \cdots + \sigma'_m(\mathfrak{b}_m, \mathfrak{b}_i)], \\ (\mathfrak{B}_i, M') = -[\tau'_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_i) + \tau'_2(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_i) + \cdots + \tau'_m(\mathfrak{b}_m, \mathfrak{b}_i)]. \end{cases}$$

XVI.

In der vorigen Nr. ist es uns gelungen, eine einleuchtende Definition für die Symbole $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ zu finden. Diese Definition hat gewiß den Nachteil, daß sie nicht direkt, sondern auf einem Umwege erlangt ist. Es ist mir leider bisher nicht gelungen, eine direkte Definition zu finden. Es sei bemerkt, daß die Werte der Symbole $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ sowohl negative als auch gebrochene Zahlen sein können, wie das Beispiel in Nr. XXIV lehrt. Und außerdem hängen z. B. die Werte der $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ nicht nur von der Wahl der Veränderlichen ξ, η ab, sondern auch von x, y, wie nicht anders zu erwarten.

Wir haben jetzt aber noch zu zeigen, daß bei der gegebenen Definition von $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ folgender Satz gilt:

Satz **3.** *Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei beliebige Divisoren in bezug auf x, y, die also aus Primteilern erster und zweiter Art zusammengesetzt sein können, und sind $\mathfrak{Q}_1^*$ und $\mathfrak{Q}_2^*$ die Divisoren in bezug auf ξ, η, in die $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ beim Übergang von x, y zu ξ, η übergehen, so ist*

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_1^*, \mathfrak{Q}_2^*).$$

Man sieht zunächst, daß folgender Satz seine Geltung behält: $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ bleibt unverändert, wenn man $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ durch einen äquivalenten Divisor ersetzt. Dies folgt einfach daraus, daß äquivalente Divisoren in den Divisoren zweiter Art, die sie enthalten, übereinstimmen, und daß der Satz richtig ist für Divisoren erster Art.

Der Beweis des Satzes (3.) gliedert sich naturgemäß in drei Teile. Wir betrachten nämlich erstens den Fall, wo $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Divisoren erster Art sind; zweitens den Fall, wo $\mathfrak{Q}_1$ ein Divisor erster Art ist, $\mathfrak{Q}_2$ einer zweiter Art; drittens den Fall, wo $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Divisoren zweiter Art sind.

1. $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ seien Divisoren erster Art. Wir dürfen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ durch einen äquivalenten Divisor ersetzen. Ist die Ordnung von $\mathfrak{Q}_1$ gleich (α_1, β_1), die von $\mathfrak{Q}_2$ gleich (α_2, β_2), so ist

$$\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{L}^{\alpha_1} \mathfrak{M}^{\beta_1}, \quad \mathfrak{Q}_2 \sim \mathfrak{L}^{\alpha_2} \mathfrak{M}^{\beta_2}.$$

Daraus ersehen wir, daß wir uns auf die Symbole

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}), \ (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}), \ (\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$$

beschränken können, da sich aus diesen die anderen unter 1.) zu behandelnden in einfacher Weise zusammensetzen lassen. Statt $\mathfrak{L}$ nehmen wir wieder wie schon früher den Zähler von $x-k$, den wir wieder mit $\mathfrak{L}_1$ bezeichnen. Dabei soll k wieder so gewählt sein, daß $s(\mathfrak{L}_1) = 1$ ist. Wir haben dann nach Nr. XIII, Gleichung (39.) und (40.):

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1' \mathfrak{a}_1^{-\sigma_1} \mathfrak{a}_2^{-\sigma_2} \cdots \mathfrak{a}_m^{-\sigma_m} = \mathfrak{L}_1' \mathfrak{l}^{-1}.$$

Es ist also zunächst zu beweisen, daß

$$(63.) \quad (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1) = \left(\frac{\mathfrak{L}_1'}{\mathfrak{l}}, \frac{\mathfrak{L}_1'}{\mathfrak{l}}\right) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') + (\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') + \sum_{\alpha,\beta}^{1 \cdots m} \sigma_\alpha \sigma_\beta (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta).$$

Wir verfahren so, daß wir zeigen, daß die rechte Seite dieser Gleichung den Wert $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1)$ hat. Unter Benutzung der Gleichung (54.) der Nr. XV ist

$$(64.) \quad (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') + \sum_{\alpha,\beta}^{1 \cdots m} \sigma_\alpha \sigma_\beta (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') - \sum_{\alpha}^{1 \cdots m} \sigma_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{L}).$$

Ehe wir weiter gehen, müssen wir auf die Transformationsformeln zurückgehen. Diese schreiben wir wie im Anfang von Nr. XI:

$$(10.) \qquad x=\frac{F(\xi,\eta)}{F_1(\xi,\eta)}=\frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}_1'}, \quad y=\frac{G(\xi,\eta)}{G_1(\xi,\eta)}=\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}_1'},$$

$$(10'.) \qquad \xi=\frac{H(x,y)}{H_1(x,y)}=\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_1}, \quad \eta=\frac{K(x,y)}{K_1(x,y)}=\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}_1}.$$

Wir bezeichnen die Ordnung von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}_1'$, die ja als äquivalente Divisoren dieselbe Ordnung haben, mit (α_1',β_1'), die von $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}_1'$ mit (α_2,β_2), die von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ mit (a_1,b_1) und schließlich die von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ mit (a_2,b_2). Zwischen den Zahlen α_i,β_i und a_i,b_i bestehen einfache Beziehungen. Für $x=$konst definieren die Gleichungen (10'.) ξ und η als rationale Funktionen von y, und zwar wird ξ eine rationale Funktion der Ordnung b_1 und η eine der Ordnung b_2. Es werden also dadurch, daß wir $x=$konst setzen, ξ und η Funktionen eines algebraischen Körpers einer Veränderlichen. Da y, wie aus der zweiten der Gleichungen (10.) folgt, sich als rationale Funktion von ξ,η darstellen läßt, also dem Körper (ξ,η) angehört, so folgt, daß ξ in dem Körper eine Funktion der Ordnung b_1 und η eine der Ordnung b_2 ist. Die Gleichung, die zwischen ξ und η besteht, ist also in ξ vom Grade b_2 und in η vom Grade b_1. Aber diese Gleichung ist nichts anderes als die Gleichung

$$F(\xi,\eta)-xF_1(\xi,\eta)=0.$$

Diese ist in ξ vom Grade α_1 und in η vom Grade β_1. Daher haben wir

$$(65.) \qquad \alpha_1=b_2, \quad \beta_1=b_1.$$

Ebenso folgt

$$(66.) \qquad \alpha_2=a_2, \quad \beta_2=a_1.$$

Wir betrachten nunmehr die Funktion

$$\frac{F(\xi,\eta)-kF_1(\xi,\eta)}{(\xi-\varkappa)^{\alpha_1}(\eta-\lambda)^{\beta_1}}=R.$$

Die Zähler von $\xi-\varkappa$ und $\eta-\lambda$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_1'$ und M_1'. $\varkappa$ und λ seien so gewählt, daß $s(\mathcal{A}_1')=s(M_1')=1$. Wir haben dann die Transformationsformeln (vgl. (61.) in Nr. XV):

$$(67.) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_1'=\mathcal{A}_1\mathfrak{b}_1^{-\sigma_1'}\mathfrak{b}_2^{-\sigma_2'}\cdots\mathfrak{b}_m^{-\sigma_m'}, \\ M_1'=M_1\mathfrak{b}_1^{-\tau_1'}\mathfrak{b}_2^{-\tau_2'}\cdots\mathfrak{b}_m^{-\tau_m'}. \end{cases}$$

Hierbei sind $\mathcal{A}_1$ und M_1 Divisoren erster Art in bezug auf x,y, und zwar ist $\mathcal{A}_1$ der Zähler von $H(x,y)-\varkappa H_1(x,y)$ und M_1 der Zähler von $K(x,y)-\lambda K_1(x,y)$, oder es ist

$$\mathcal{A}_1 = \mathfrak{H} - z\mathfrak{H}_1, \quad M_1 = \mathfrak{K} - \lambda\mathfrak{K}_1.$$

Die Ordnung von $\mathcal{A}_1$ ist also (a_1, b_1), und die von M_1 ist (a_2, b_2).

Die Funktion R können wir in Primteiler zerlegt schreiben

$$R = \frac{\mathfrak{L}_1'}{\mathcal{A}_1'^{\alpha_1} M_1'^{\beta_1}}.$$

Wir können weiter angeben, worin R übergeht beim Übergang von ξ, η zu x, y. Dabei brauchen wir nur die Primteiler erster Art in bezug auf x, y zu berücksichtigen, da die anderen sich fortheben müssen. Beschränken wir uns aber auf die Primteiler erster Art in bezug auf x, y, so geht $\mathfrak{L}_1'$ über in $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}_1^{\sigma_1} \mathfrak{A}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{\sigma_m}$, $\mathcal{A}_1'$ geht über in $\mathcal{A}_1$ und M_1' in M_1. Wir haben demnach

$$R = \frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}_1^{\sigma_1} \mathfrak{A}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{\sigma_m}}{\mathcal{A}_1^{\alpha_1} M_1^{\beta_1}}.$$

Hieraus folgt

(68.) $$\mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}_1^{\sigma_1} \mathfrak{A}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{\sigma_m} \sim \mathcal{A}_1^{\alpha_1} M_1^{\beta_1}$$

und daraus

$$(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}_1^{\sigma_1} \mathfrak{A}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{\sigma_m}) = (\mathfrak{L}_1, \mathcal{A}_1^{\alpha_1} M_1^{\beta_1})$$

oder

$$(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1) + \sum_{a}^{1 \cdots m} \sigma_a (\mathfrak{A}_a, \mathfrak{L}_1) = \alpha_1 (\mathfrak{L}_1, \mathcal{A}_1) + \beta_1 (\mathfrak{L}_1, M_1) = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2,$$

wenn wir die Ordnungen von $\mathfrak{L}_1, \mathcal{A}_1, M_1$ berücksichtigen. Unter Benutzung dieser Gleichung wird aus der Gleichung (64.), wenn wir bedenken, daß $\mathfrak{L}_1 \sim \mathfrak{L}$ und also $(\mathfrak{A}_a, \mathfrak{L}_1) = (\mathfrak{A}_a, \mathfrak{L})$ ist,

(69.) $$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') + \sum_{a,\beta}^{1 \cdots m} \sigma_a \sigma_\beta (\mathfrak{a}_a, \mathfrak{a}_\beta) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') - \alpha_1 b_1 - \beta_1 b_2 + (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1).$$

Nun ist $\mathfrak{L}_1'$ der Zähler von $F - kF_1$ oder es ist $\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{F} - k\mathfrak{F}_1$, also die Ordnung von $\mathfrak{L}_1'$ gleich α_1, β_1 und daher

$$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') = 2\alpha_1\beta_1.$$

Da ferner nach den Gleichungen (65.) und (66.) $b_1 = \beta_1, b_2 = \alpha_1$ ist, so wird

$$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_1') - \alpha_1 b_1 - \beta_1 b_2 = 0,$$

und damit geht die Gleichung (69.) in die zu beweisende Gleichung (63.) über.

Das Symbol $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ brauchen wir wohl nicht besonders zu behandeln, da die Betrachtung gegenüber der von $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L})$ nichts Neues bieten würde. Wohl aber müssen wir noch eingehen auf das Symbol $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$. Wir nehmen statt $\mathfrak{L}$ wieder $\mathfrak{L}_1$, und statt $\mathfrak{M}$ nehmen wir den Zähler von $y - l$, den wir mit $\mathfrak{M}_1$ bezeichnen. Dabei soll l so gewählt sein, daß $s(\mathfrak{M}_1) = 1$ wird. Bezeichnen wir den Zähler von $G(\xi, \eta) - lG_1(\xi, \eta)$ mit $\mathfrak{M}_1'$, so haben wir entsprechend den Gleichungen (39.) und (40.) der Nr. XIII:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1' \mathfrak{a}_1^{-\tau_1} \mathfrak{a}_2^{-\tau_2} \cdots \mathfrak{a}_m^{-\tau_m} = \mathfrak{M}_1' \mathfrak{m}^{-1}.$$

Wir haben dann folgende Gleichung zu beweisen

$$(70.)\quad (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1) = \left(\frac{\mathfrak{L}_1'}{\mathfrak{l}}, \frac{\mathfrak{M}_1'}{\mathfrak{m}}\right) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') + (\mathfrak{l}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') + \sum_{\alpha,\beta}^{1\ldots m} \sigma_\alpha \tau_\beta (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta).$$

Wir verfahren wie im vorigen Falle. Es wird mit Benutzung der Gleichung (58.) der Nr. XV

$$(71.)\qquad (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') + \sum_{\alpha,\beta}^{1\ldots m} \sigma_\alpha \tau_\beta (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') - \sum_{\alpha}^{1\ldots m} \sigma_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{M}).$$

Aus der Äquivalenz (68.) folgt

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}_1^{\sigma_1} \mathfrak{A}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{\sigma_m}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1^{\alpha_1} \mathfrak{M}_1^{\beta_1}),$$

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}_1) + \sum_{\alpha}^{1\ldots m} \sigma_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{M}) = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2.$$

Dann wird aus Gleichung (71.), da $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}$ und also $(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}_1) = (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{L}_1)$,

$$(72.)\quad (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') + \sum_{\alpha,\beta}^{1\ldots m} \sigma_\alpha \tau_\beta (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') - \alpha_1 a_1 - \beta_1 a_2 + (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1).$$

Aber es ist

$$\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{G} - l\mathfrak{G}_1,$$

also die Ordnung von $\mathfrak{M}_1'$ gleich (a_2, b_2). Da die Ordnung von $\mathfrak{L}_1'$ gleich (a_1, b_1) war, so ist

$$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$

Daher wird unter Benutzung der Gleichungen (65.) und (66.)

$$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{M}_1') - \alpha_1 a_1 - \beta_1 a_2 = 0,$$

und damit geht die Gleichung (72.) in die zu beweisende Gleichung (70.) über.

XVII.

2. Wir betrachten den Fall, wo in $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ $\mathfrak{Q}_1$ ein Divisor erster Art und $\mathfrak{Q}_2$ ein solcher zweiter Art ist. Da sich die Divisoren zweiter Art aus den Primteilern $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_m$ zusammensetzen, und da ein Divisor erster Art immer einem Divisor von der Form $\mathfrak{L}_1^a \mathfrak{M}_1^b$ äquivalent ist, so genügt es, die beiden Symbole

$$(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{b}_i),\ (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{b}_i)$$

zu untersuchen, da sich aus ihnen alle anderen der hier betrachteten Art zusammensetzen lassen.

Die Transformationsformel von $\mathfrak{b}_i$ ist die Gleichung (III.) in Nr. VIII

$$\mathfrak{b}_i = \frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i}.$$

Danach ist die Gleichung zu beweisen

$$(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{b}_i) = \left(\frac{\mathfrak{L}_1'}{\mathfrak{l}}, \frac{\mathfrak{B}_i}{s\,\mathfrak{B}_i}\right) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) + (\mathfrak{l}, s\,\mathfrak{B}_i)$$

oder, wenn wir

(73.) $$s\,\mathfrak{B}_i = \mathfrak{a}_1^{\beta_{i1}}\,\mathfrak{a}_2^{\beta_{i2}} \cdots \mathfrak{a}_m^{\beta_{im}}$$

setzen und bedenken, daß $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{b}_i) = 0$ ist, dann ist zu beweisen, daß

(74.) $$(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) + \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} \sigma_\mu \beta_{i\lambda}\,(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu) = 0.$$

Zum Beweise verfahren wir ähnlich, wie wir es unter 1. in der vorigen Nr. getan haben. Zunächst wird bei Benutzung der Gleichungen (58.) der Nr. XV

(75.) $$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) + \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} \sigma_\mu \beta_{i\lambda}\,(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) - \sum_{\lambda}^{1\ldots m} \beta_{i\lambda}\,(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{A}_\lambda).$$

Es ist ferner $\mathfrak{B}_i$ der Zähler einer rationalen Funktion von ξ, η, die wir mit B_i bezeichnen wollen. Die Ordnung von $\mathfrak{B}_i$ wollen wir bezeichnen mit (b_i', b_i''). Dann ist unter Benutzung der Bezeichnungen der vorigen Nr.

$$\frac{B_i}{(\xi-\varkappa)^{b_i'}(\eta-\lambda)^{b_i''}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{A}_1'^{b_i'}\,\mathfrak{M}_1'^{b_i''}}.$$

Wir können angeben, in welchen Divisor diese Funktion übergeht beim Übergang von ξ, η zu x, y. Da es sich um eine Funktion des Körpers (ξ, η) oder (x, y) handelt, so können wir die Primteiler zweiter Art in bezug auf x, y außer acht lassen, da diese sich im Endresultat doch fortheben müssen. Lassen wir aber diese Primteiler fort, so geht $\mathfrak{B}_i$ über in $\mathfrak{A}_1^{\beta_{i1}}\,\mathfrak{A}_2^{\beta_{i2}} \cdots \mathfrak{A}_m^{\beta_{im}}$, wie sich aus der Gleichung (II.) in Nr. VIII in Verbindung mit Gleichung (73.) ergibt, und $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{M}_1'$ gehen über in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{M}_1$, wie die Gleichungen (67.) der vorigen Nr. zeigen. Daraus folgt, daß

$$\frac{\mathfrak{A}_1^{\beta_{i1}}\,\mathfrak{A}_2^{\beta_{i2}} \cdots \mathfrak{A}_m^{\beta_{im}}}{\mathfrak{A}_1^{b_i'}\,\mathfrak{M}_1^{b_i''}}$$

eine rationale Funktion von x, y ist. Es ist also

(76.) $$\mathfrak{A}_1^{\beta_{i1}}\,\mathfrak{A}_2^{\beta_{i2}} \cdots \mathfrak{A}_m^{\beta_{im}} \sim \mathfrak{A}_1^{b_i'}\,\mathfrak{M}_1^{b_i''},$$

$$(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{A}_1^{\beta_{i1}}\,\mathfrak{A}_2^{\beta_{i2}} \cdots \mathfrak{A}_m^{\beta_{im}}) = (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{A}_1^{b_i'}\,\mathfrak{M}_1^{b_i''})$$

oder

$$\sum_{a}^{1\ldots m} \beta_{ia}\,(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{A}_a) = b_i'\,(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{A}_1) + b_i''\,(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1) = b_i' b_1 + b_i'' b_2,$$

da die Ordnung von $\mathfrak{A}_1$ gleich (a_1, b_1) und die von $\mathfrak{M}_1$ gleich (a_2, b_2) ist, wie schon in voriger Nr. bewiesen. Nunmehr läßt sich die Gleichung (75.) schreiben

(77.) $$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) + \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} \sigma_\mu \beta_{i\lambda}\,(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu) = (\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) - b_i' b_1 - b_i'' b_2.$$

Es ist aber die Ordnung von $\mathfrak{L}_1'$ gleich $(\alpha_1, \beta_1) = (b_2, b_1)$ (siehe vorige Nr.), und die von $\mathfrak{B}_i$ ist (b_i', b_i''). Daher ist

$$(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) - b_i' b_1 - b_i'' b_2 = 0,$$

und damit geht die Gleichung (77.) in die zu beweisende Gleichung (74.) über.

Es wäre ebenso das Symbol $(\mathfrak{M}, \mathfrak{b}_i)$ zu untersuchen. Da die Untersuchung aber ganz analog der soeben ausgeführten ist, so können wir sie wohl fortlassen.

Es braucht wieder kaum bemerkt zu werden, daß die hergeleiteten Sätze auch gelten, wenn wir statt von Divisoren in bezug auf x, y von Divisoren in bezug auf ξ, η ausgehen.

XVIII.

3. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, wo in dem Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ die Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ beide von der zweiten Art sind. Da sich alle diese Divisoren aus den Divisoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_m$ zusammensetzen, so genügt es, den Fall zu untersuchen, wo $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ ist. Es wird aber nach der Formel (III.) der Nr. VIII

$$\mathfrak{b}_i = \frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i}.$$

Wir haben also folgende Gleichung zu beweisen

(78.) $$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = \left(\frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i}, \frac{\mathfrak{B}_k}{s\mathfrak{B}_k}\right) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k) + (s\mathfrak{B}_i, s\mathfrak{B}_k).$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein

(79.) $$s\mathfrak{B}_i = \mathfrak{a}_1^{\beta i 1}\, \mathfrak{a}_2^{\beta i 2} \ldots \mathfrak{a}_m^{\beta i m}, \quad s\mathfrak{A}_i = \mathfrak{b}_1^{\alpha i 1}\, \mathfrak{b}_2^{\alpha i 2} \ldots \mathfrak{b}_m^{\alpha i m}.$$

Dann nimmt die zu beweisende Gleichung (78.) die Form an

(80.) $$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k) + \sum_{\lambda,\mu} \beta_{i\lambda} \beta_{k\mu} (\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu).$$

Diese Gleichung können wir nicht direkt beweisen, da wir mit den bisher benutzten Gleichungen nicht auskommen. Denn diese geben, wie man leicht sieht, keine Beziehung zwischen den $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$. Wir müssen daher auf die Definition der $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ zurückgehen, d. h. aber auf die Größen $[i,k]$ und $[i,k]'$. Wir formen daher die Gleichung (80.) entsprechend dieser Bemerkung um.

Dazu müssen wir zunächst Gleichungen zwischen den α_{ik} und β_{ik} herleiten.

Es besteht die Äquivalenz

$$\mathfrak{B}_i \backsim \mathfrak{A}_1'^{b_i'}\, \mathfrak{M}_1'^{b_i''},$$

wo (b_i', b_i'')die Ordnung von $\mathfrak{B}_i$ bezeichnet. Die Divisoren, in die $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{A}_1'^{b_i'} M_1'^{b_i''}$ bei der Transformation übergehen, müssen daher auch äquivalent sein, müssen also auch in den Divisoren zweiter Art, die sie enthalten, übereinstimmen. Es ist

$$\mathfrak{B}_i = \mathfrak{b}_i \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s\,\mathfrak{A}_1}\right)^{\beta_{i1}} \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s\,\mathfrak{A}_2}\right)^{\beta_{i2}} \cdots \left(\frac{\mathfrak{A}_m}{s\,\mathfrak{A}_m}\right)^{\beta_{im}},$$

(81.)

$$\mathfrak{A}_1'^{b_i'} M_1'^{b_i''} = \frac{\mathfrak{A}_1^{b_i'} M_1^{b_i''}}{\mathfrak{b}_1^{\sigma_1' b_i' + \tau_1' b_i''} \mathfrak{b}_2^{\sigma_2' b_i' + \tau_2' b_i''} \cdots \mathfrak{b}_m^{\sigma_m' b_m' + \tau_m' b_i''}}.$$

Die Übereinstimmung dieser beiden Divisoren in den Divisoren zweiter Art ergibt unter Benutzung der Gleichungen (79.) das Gleichungssystem

(82.) $$\alpha_{1k}\beta_{i1} + \alpha_{2k}\beta_{i2} + \cdots + \alpha_{mk}\beta_{im} = \sigma_k' b_i' + \tau_k' b_i'' + \varepsilon_{ik},$$

wo ε_{ik} das Einheitssystem bedeutet. In derselben Weise können wir, indem wir statt von $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{A}_i$ ausgehen, folgendes Gleichungssystem beweisen:

(83.) $$\alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{im}\beta_{mk} = \sigma_k a_i' + \tau_k a_i'' + \varepsilon_{ik},$$

wo wir mit (a_i', a_i'') die Ordnung von $\mathfrak{A}_i$ bezeichnen.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung (80.) mit α_{lk} und summieren über k von 1 bis m, so bekommen wir unter Benutzung der soeben abgeleiteten Gleichungen

$$\sum_k \alpha_{lk}(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = \sum_k \alpha_{lk}(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k) + \sum_{\lambda,\mu} \left(\sum_k \alpha_{lk}\beta_{k\mu}\right) \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu)$$

$$= \sum_k \alpha_{lk}(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k) + a_l' \sum_{\lambda,\mu} \sigma_\mu \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu) + a_l'' \sum_{\lambda,\mu} \tau_\mu \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu) + \sum_\lambda \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_l).$$

Hieraus wird mit Benutzung der Gleichung (74.) auf Seite 296

(84.)

$$\sum_\lambda \alpha_{l\lambda}(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_\lambda) = \sum_\lambda \alpha_{l\lambda}(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_\lambda) - a_l'(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{B}_i) - a_l''(\mathfrak{M}_1', \mathfrak{B}_i) + \sum_\lambda \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_l, \mathfrak{a}_\lambda)$$

$$= (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_1^{a_{l1}} \mathfrak{B}_2^{a_{l2}} \cdots \mathfrak{B}_m^{a_{lm}}) - (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{L}_1'^{a_l} \mathfrak{M}_1'^{a_l''}) + \sum_{(\lambda)} \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_l, \mathfrak{a}_\lambda).$$

Nach Analogie der Äquivalenz (76.) der vorigen Nr. besteht aber die Äquivalenz

(85.) $$\mathfrak{B}_1^{a_{l1}} \mathfrak{B}_2^{a_{l2}} \cdots \mathfrak{B}_m^{a_{lm}} \sim \mathfrak{L}_1'^{a_l} \mathfrak{M}_1'^{a_l''},$$

und daher bekommen wir aus (84.) die einfache und symmetrische Gleichung

(86.) $$\sum_\lambda \alpha_{l\lambda}(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_\lambda) = \sum_\lambda \beta_{i\lambda}(\mathfrak{a}_l, \mathfrak{a}_\lambda).$$

Diese Gleichung können wir auch mit Benutzung der Gleichungen (79.) in der Form schreiben

(87.) $$(s\,\mathfrak{A}_l, \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{a}_l, s\,\mathfrak{B}_i).$$

Bedenken wir, daß $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ immer dann gleich Null ist, wenn der eine der Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ von der ersten und der andere von der zweiten Art ist, so können wir (87.) auch in die Form setzen

(88.) $$\left(\frac{\mathfrak{A}_l}{s\,\mathfrak{A}_l}, \mathfrak{b}_i\right) = \left(\mathfrak{a}_l, \frac{\mathfrak{B}_i}{s\,\mathfrak{B}_i}\right).$$

Da

$$\frac{\mathfrak{A}_l}{s\,\mathfrak{A}_l} = \mathfrak{a}_l \text{ und } \frac{\mathfrak{B}_i}{s\,\mathfrak{B}_i} = \mathfrak{b}_i,$$

so ergibt sich diese Formel sehr einfach, wenn man erst einmal weiß, daß man den Satz 3 anwenden darf, was aber noch zu beweisen ist.

Die Gleichungen (86.) lassen sich als Gleichungen zwischen Systemen in der Form schreiben

(89.) $$((\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k))(\alpha) = (\bar{\beta})((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)),$$

wo $(\bar{\beta})$ das System bezeichnet, das aus (β) durch Vertauschen von Zeilen und Kolonnen hervorgeht. Bedenken wir, daß nach der Definition der Größen $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ die Systeme $(-[i,k]')$ und $(-[i,k])$ zu den Systemen $((\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k))$ und $((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k))$ reziprok sind, so folgt aus (89.) durch vordere Komposition mit $(-[i,k]')$ und hintere Komposition mit $(-[i,k])$

$$(\alpha)([i,k]) = ([i,k]')(\bar{\beta})$$

oder die Gleichungen

(90.) $$\sum_\lambda \alpha_{\lambda l}[i,\lambda] = \sum_\lambda \beta_{\lambda i}[l,\lambda]'.$$

Diese Gleichungen können wir nun beweisen. Ist das geschehen, so können wir aus ihnen, indem wir die gemachte Rechnung rückwärts verfolgen die Gleichungen (80.), die eigentlich zu beweisen sind, herleiten. Damit ist dann der Beweis des Satzes 3 vollendet.

Es sei A_i die Eichfunktion des Primteilers $\mathfrak{a}_i$. Werden für $\mathfrak{a}_i = 0$ die Größen ξ und η gleich ξ_0 und η_0, so ist A_i eine ganze rationale Funktion von $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0$, wo unter $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0$ zu verstehen ist $\frac{1}{\xi}, \frac{1}{\eta}$, wenn ξ_0, η_0 unendlich groß sind. Es verschwindet A_i sicher im Punkte ξ_0, η_0. Nun kann man aber zu der Funktion A_i Glieder hinzufügen, die in $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0$ von genügend hoher Ordnung sind, ohne daß sie ihre wesentlichen Eigenschaften verliert. Daher können wir der Einfachheit wegen annehmen, daß A_i außer im Fundamentalpunkte ξ_0, η_0 an keinem anderen Fundamentalpunkte Null wird. Bezeichnen wir den Zähler von A_i mit A_i', so ist dann A_i' nur durch diejenigen Primteiler $\mathfrak{a}_k$ teilbar, die zum Fundamentalpunkt ξ_0, η_0 gehören. Ist $\mathfrak{a}_k$ einer dieser Primteiler, so haben wir zur Bestimmung der Potenz, in der er in A_i' enthalten ist, nachzusehen, wieviele Schnittpunkte die beiden Eichkurven $A_i(t_1) = 0$ und

$A_k(t_2)=0$ im Punkte ξ_0,η_0 haben. Diese Zahl haben wir aber früher mit $[i,k]$ bezeichnet. Da aber $[i,k]$ nach Definition den Wert Null hat, wenn der Primteiler $\mathfrak{a}_k$ nicht zur Stelle ξ_0,η_0 gehört, wenn also $\mathfrak{a}_k$ nicht in A_i' enthalten ist, so können wir schreiben

$$(91.) \qquad s A_i' = \mathfrak{a}_1^{[i,1]}\mathfrak{a}_2^{[i,2]}\cdots\mathfrak{a}_m^{[i,m]}.$$

A_i' ist der Primteiler in bezug auf ξ,η, der dem Körper $A_i=0$ entspricht. Es sei A_i^* der Primteiler in bezug auf x,y, der demselben Körper $A_i=0$ entspricht. Es ist dann

$$(92.) \qquad A_i' = \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s\mathfrak{A}_1}\right)^{[i,1]}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s\mathfrak{A}_2}\right)^{[i,2]}\cdots\left(\frac{\mathfrak{A}_m}{s\mathfrak{A}_m}\right)^{[i,m]}\left(\frac{A_i^*}{sA_i^*}\right).$$

Die Primteiler zweiter Art, die in dieser Gleichung auf der rechten Seite stehen, verdanken ihr Vorhandensein, wie wir in Nr. XIII und XIV gesehen haben, den Schnittpunkten von A_i' mit den singulären Primteilern $\mathfrak{B}_k$. Ein solcher Primteiler $\mathfrak{B}_k$ kann A_i' in dem Fundamentalpunkte ξ_0,η_0 schneiden und außerdem noch in anderen Punkten. Die Zahl der Schnittpunkte in ξ_0,η_0 ist vollkommen bestimmt. Sie ändert sich nicht, wenn wir A_i', das ja auf viele verschiedene Arten gewählt werden kann, anders wählen, da die Entwicklung von A_i in der Umgebung von ξ_0,η_0 soweit vorgeschrieben ist, daß die Anzahl der in Rede stehenden Schnittpunkte vollkommen bestimmt ist. Die anderen Schnittpunkte von A_i' mit $\mathfrak{B}_k$ sind dagegen weder ihrer Lage nach noch ihrer Zahl nach von vornherein bestimmt, sondern werden es erst, wenn A_i in bestimmter Art gewählt ist. Ferner bleibt bei einer erlaubten Änderung von A_i der Wert von sA_i' und damit in (92.) der Divisor $\mathfrak{A}_1^{[1,i]}\cdots\mathfrak{A}_m^{[i,m]}$ unverändert, während sich A_i^* und damit sA_i^* ändern. Daraus schließen wir, daß den Schnittpunkten, die die $\mathfrak{B}_k$ mit A_i' im Punkte ξ_0,η_0 gemeinsam haben, der singuläre Divisor $(s\mathfrak{A}_1)^{[i,1]}(s\mathfrak{A}_2)^{[i,2]}\cdots(s\mathfrak{A}_m)^{[i,m]}$ seine Entstehung verdankt, während der Divisor sA_i^* den anderen noch vorhandenen Schnittpunkten der $\mathfrak{B}_k$ mit A_i' entspricht. Die Zahl der Schnittpunkte, die $\mathfrak{B}_k$ mit A_i' im Punkte ξ_0,η_0 gemeinsam hat, ist aber β_{ki}. Ist also $\mathfrak{b}_l$ in der h-ten Potenz in $(s\mathfrak{A}_1)^{[i,1]}(s\mathfrak{A}_2)^{[i,2]}\cdots(s\mathfrak{A}_m)^{[i,m]}$ enthalten, so ist nach Nr. XIV

$$h=\beta_{1i}[l,1]'+\beta_{2i}[l,2]'+\cdots+\beta_{mi}[l,m]'.$$

Andererseits ist aber $\mathfrak{b}_l$ in $\mathfrak{A}_k$ in der Potenz α_{kl} enthalten und daher

$$h=\alpha_{1l}[i,1]+\alpha_{2l}[i,2]+\cdots+\alpha_{ml}[i,m].$$

Danach haben wir die Gleichung

$$\sum_{(\lambda)} \alpha_{\lambda l}[i,\lambda] = \sum_{(\lambda)} \beta_{\lambda l}[l,\lambda]'.$$

Das ist aber die zu beweisende Gleichung (90.)

Damit ist Satz **3** in allen Teilen bewiesen. Dadurch haben wir auch die Berechtigung gewonnen, den Begriff des Divisors und der Äquivalenz zu verallgemeinern. Unter einem Divisor können wir jetzt das Produkt von irgendwelchen Primteilern in ganzzahliger Potenz verstehen, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, ob die in einem Divisor enthaltenen Primteiler sich alle auf x, y oder alle auf ξ, η beziehen. Wir wollen also auch solche Divisoren zulassen, in denen sich die Primteiler teils auf x, y und teils auf ξ, η beziehen. Zwei solche Divisoren nennen wir dann äquivalent, wenn ihr Quotient unter Benutzung der Formeln (I.), (II.), (III.) der Nr. VIII in einen Divisor verwandelt werden kann, der einer Funktion des Körpers (x, y) oder (ξ, η) entspricht. Nach den Sätzen **1**, **2**, **3** erfüllt diese Definition die Bedingungen, die man an die Äquivalenz stellen muß, nämlich die Bedingungen: Jeder Divisor ist sich selbst äquivalent. Sind zwei Divisoren einem dritten äquivalent, so sind sie untereinander äquivalent.

Wir können dann die Sätze **1**, **2**, **3** zusammenfassen in den einen

Satz 4: Das Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ *ändert sich nicht, wenn man* $\mathfrak{Q}_1$ *und* $\mathfrak{Q}_2$ *durch ihnen äquivalente Divisoren ersetzt.*

XIX.

Durch die Benutzung der bewiesenen Sätze kann man mannigfache Gleichungen zwischen den eingeführten Größen ableiten und auch mannigfache neue Sätze. Aber alle diese Formeln und Sätze finden ihren einfachsten Ausdruck eben in Satz 4. Ich will hier einige dieser Formeln herleiten und will dabei Bezug nehmen auf die Arbeit von *A. Clebsch* über die *Cremona*sche Transformation*) und, soweit das geht, diejenigen Formeln und Sätze angeben, die den dort angegebenen in der allgemeinen Theorie entsprechen.

Es war

$$\xi = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_1}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}_1},$$

wo $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ von der Ordnung (a_1, b_1) und $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ von der Ordnung (a_2, b_2) waren. Wir wählen ξ_0 und η_0 so, daß die Zähler von $\xi - \xi_0$ und

*) *A. Clebsch*, Zur Theorie der *Cremona*schen Transformation. Math. Ann. Bd. 4.

$\eta-\eta_0$ durch keinen singulären Primteiler teilbar sind, und bezeichnen den Zähler von $\xi-\xi_0$ wieder mit $\mathcal{A}_1'$ und den von $\eta-\eta_0$ mit M_1'. Bedenken wir, daß wir in $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ äquivalente Divisoren für einander setzen dürfen, und daß $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ immer dann gleich Null wird, wenn der eine der Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ von der ersten Art und der andere von der zweiten Art ist, so haben wir

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 2a_1 b_1 = (\mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1) = \Big(\frac{\mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1}{s(\mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1)}, \mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1\Big)$$
$$= (\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_1'\mathfrak{B}_1^{\sigma_1'}\mathfrak{B}_2^{\sigma_2'}\cdots\mathfrak{B}_m^{\sigma_m'}) = \sum_{(\lambda)}\sigma_\lambda'(\mathcal{A}_1', \mathfrak{B}_i) = \sum_{(\lambda)} b_i''\sigma_i'.$$

In derselben Weise kann man $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 2a_2 b_2$ berechnen. Ferner

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = \Big(\frac{\mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1}{s(\mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1)}, \mathfrak{K}-\eta_0\mathfrak{K}_1\Big) = (\mathcal{A}_1', M_1'\mathfrak{B}_1^{\tau_1'}\mathfrak{B}_2^{\tau_2'}\cdots\mathfrak{B}_m^{\tau_m'})$$
$$= 1 + \sum_{(\lambda)}\tau_\lambda' b_\lambda'' = \Big(\mathfrak{H}-\xi_0\mathfrak{H}_1, \frac{\mathfrak{K}-\eta_0\mathfrak{K}_1}{s(\mathfrak{K}-\eta_0\mathfrak{K}_1)}\Big) = (\mathcal{A}_1'\mathfrak{B}_1^{\sigma_1'}\mathfrak{B}_2^{\sigma_2'}\cdots\mathfrak{B}_m^{\sigma_m'}, M_1')$$
$$= 1 + \sum_{(\lambda)}\sigma_\lambda' b_\lambda'.$$

Nehmen wir zu diesen Gleichungen die analogen Gleichungen, die sich hieraus durch Vertauschen von x, y mit ξ, η, also durch Vertauschen von

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \sigma_i', \tau_i', b_i', b_i'' \text{ mit } \alpha_1 = b_2, \beta_1 = b_1, \alpha_2 = a_2, \beta_2 = a_1, \quad \sigma_i, \tau_i, a_i', a_i''$$

ergeben, so haben wir das Gleichungssystem

$$\text{(a.)} \qquad \begin{cases} \sum_\lambda \sigma_\lambda a_\lambda'' = 2b_1 b_2, & \sum_\lambda \tau_\lambda a_\lambda' = 2a_1 a_2, \\ \sum_\lambda \sigma_\lambda' b_\lambda'' = 2a_1 b_1, & \sum_\lambda \tau_\lambda b_\lambda' = 2a_2 b_2, \\ \sum_\lambda \sigma_\lambda a_\lambda' = \sum_\lambda \tau_\lambda a_\lambda'' = \sum_\lambda \sigma_\lambda' b_\lambda' = \sum_\lambda \tau_\lambda' b_\lambda'' = a_1 b_2 + a_2 b_1 - 1. \end{cases}$$

Hierzu bilden wir noch die Gleichungen, die ausdrücken, daß die Kurven

$$F - kF_1 = 0,\ G - kG_1 = 0,\ H - kH_1 = 0,\ K - kK_1 = 0$$

bei beliebigem k vom Geschlechte Null sind. Es ist z. B. die Gleichung $F - kF_1 = 0$ ersetzbar durch die Gleichung $x - k = 0$, also sicher vom Geschlechte Null. Wir betrachten die Kurve $F - kF_1 = 0$. Diese ist in ξ und η von der Ordnung $(\alpha_1, \beta_1) = (b_2, a_1)$. Bezeichnen wir demnach die Ordnung des Doppelpunktdivisors von $F - kF_1 = 0$ mit $2d$, so ist

$$\text{(93.)} \qquad (b_1 - 1)(b_2 - 1) - d = 0.$$

Die Kurve $F - kF_1 = 0$ kann aber für beliebige k nur mehrfache Punkte haben in den Punkten, wo $F = 0$ und $F_1 = 0$ sich schneiden, also in den Fundamentalpunkten. Wir betrachten wieder den Fundamentalpunkt ξ_0, η_0,

zu dem die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\varrho$ gehören. Setzen wir $\xi - \xi_0 = u, \eta - \eta_0 = v$, so stimmen, wie wir in Nr. X und XI gesehen haben, die Entwicklungen der Wurzeln v von $F - kF_1 = 0$ nach Potenzen von u in der Umgebung der Stelle ξ_0, η_0, d. h. $u = v = 0$, mit denen von

$$A_1^{l_1} A_2^{l_2} \cdots A_\varrho^{l_\varrho} = 0$$

in den Anfangsgliedern überein, soweit diese von k unabhängig sind, und in dem auf diese Glieder folgenden Gliede in dem Exponenten von u. Man kann daher zur Berechnung der Ordnung des Doppelpunktdivisors die Entwicklungen der Wurzeln von $A_1^{l_1} A_2^{l_2} \cdots A_\varrho^{l_\varrho} = 0$ benutzen, muß aber die Wurzeln von $A_i = 0$ natürlich l_i-mal zählen. Die Berechnung ist auszuführen nach den Methoden, wie sie z. B. auseinandergesetzt sind bei *Hensel-Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln (Leipzig 1902), 23. Vorlesung.

Ich will mich hier darauf beschränken das Resultat anzugeben. Es war A_1 definiert durch (vgl. Nr. X)

$$(94.) \qquad A_1 = \mathrm{Norm}\,(v - a_1 u^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} - a_2 u^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} - \cdots - t u^{\frac{\alpha_\lambda}{\alpha}}).$$

Es ist also A_1 eine ganze rationale Funktion von u und v vom Grade α in v und α_λ in u; oder der Grad von A_1 ist (α_λ, α). Wir wollen jetzt unter der Voraussetzung, daß die A_i alle nach Art der Formel (94.) gebildet sind, allgemein die Ordnung von A_i mit (α_i', α_i'') bezeichnen, also auch die von A_1 mit (α_1', α_1'') statt mit (α_λ, α). Entsprechend bezeichnen wir die Ordnung von B_i mit (β_i', β_i''). Dann ergibt sich als der Beitrag, den der Fundamentalpunkt ξ_0, η_0 zu der Ordnung des Doppelpunktdivisors liefert, der Wert

$$\sum_\lambda^{1 \ldots \varrho} l_\lambda \{l_1[\lambda, 1] + l_2[\lambda, 2] + \cdots + l_\varrho[\lambda, \varrho]\} - \sum_\lambda^{1 \ldots \varrho} l_\lambda (\alpha_\lambda' + \alpha_\lambda'' - 1),$$

wo wir unter dem ersten Summenzeichen auch noch die Glieder $l_{\varrho+1}[\lambda, \varrho+1] + \cdots + l_m[\lambda, m]$ hinzuschreiben können, da $[\lambda, \mu] = 0$ für $\lambda \leqq \varrho$ und $\mu > \varrho$. Und daraus folgt als Ordnung des gesamten Doppelpunktdivisors

$$2d = \sum_\lambda^{1 \ldots m} l_\lambda (l_1[\lambda, 1] + l_2[\lambda, 2] + \cdots + l_m[\lambda, m]) - \sum_\lambda^{1 \ldots m} l_\lambda (\alpha_\lambda' + \alpha_\lambda'' - 1).$$

Es war aber $l_\lambda = a_\lambda''$, und nach (47.) in Nr. XIV ist die Summe unter dem ersten Summenzeichen gleich σ_λ. Danach folgt aus (93.)

$$2(b_1 - 1)(b_2 - 1) = \sum_\lambda \sigma_\lambda a_\lambda'' - \sum_\lambda a_\lambda'' (\alpha_\lambda' + \alpha_\lambda'' - 1).$$

Vergleicht man dies mit den Gleichungen (a.), so erhält man die erste der folgenden Gleichungen, zu der ich die analogen sogleich hinzufüge, die sich daraus ergeben, daß auch die Kurven $G - kG_1 = 0$, $H - kH_1 = 0$, $K - kK_1 = 0$ vom Geschlechte Null sind:

$$(a'.)\quad \begin{cases} \sum_\lambda a''_\lambda (\alpha'_\lambda + \alpha''_\lambda - 1) = 2(b_1 + b_2 - 1), & \sum_\lambda b'_\lambda (\beta'_\lambda + \beta''_\lambda - 1) = 2(a_2 + b_2 - 1), \\ \sum_\lambda a'_\lambda (\alpha'_\lambda + \alpha''_\lambda - 1) = 2(a_1 + a_2 - 1), & \sum_\lambda b''_\lambda (\beta'_\lambda + \beta''_\lambda - 1) = 2(a_1 + b_1 - 1). \end{cases}$$

Die Gleichungen (a.) und (a'.) entsprechen den Gleichungen (1.) von *Clebsch*.

Wir haben ferner die Gleichungen (82.) und (83.) der Nr. XVIII

$$(b.)\qquad \sum_\lambda \alpha_{i\lambda}\beta_{\lambda k} = a'_i \sigma_k + a''_i \tau_k + \varepsilon_{ik}, \quad \sum_\lambda \alpha_{\lambda i}\beta_{k\lambda} = b'_k \sigma'_i + b''_k \tau'_i + \varepsilon'_{ik},$$

wo (ε_{ik}) und (ε'_{ik}) Einheitssysteme sind.

Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen (4.) und (6.) von *Clebsch*.

Unter Benutzung der Gleichungen (a.) und (b.) können wir nun den Nachweis führen, daß die Anzahl der singulären Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gleich der Anzahl der singulären Primteiler $\mathfrak{b}_i$ ist. Wir haben zwar bei unseren Untersuchungen die Richtigkeit dieses Satzes von vornherein angenommen, jedoch haben wir nie wesentlichen Gebrauch von dem Satze gemacht. Nehmen wir an, die Zahl der $\mathfrak{a}_i$ sei m und die Zahl der $\mathfrak{b}_i$ sei m', so bleiben alle Überlegungen ganz unverändert bestehen. Es werden die $[i,k]$, $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$, ε_{ik} Systeme von m^2 Größen, die $[i,k]'$, $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)'$, ε'_{ik} solche von m'^2 Größen, die α_{ik}, β_{ik} werden Matrizen vom mm' Größen. Alle Gleichungen bleiben unverändert bestehen. Setzen wir in den Gleichungen (b.) $i = k$ und summieren dann über k, so bekommen wir unter Benutzung der Gleichungen (a.)

$$\sum_{\lambda,k} \alpha_{k\lambda}\beta_{\lambda k} = m + \sum_k a'_k \sigma_k + \sum_k a''_k \tau_k = m + 2(a_1 b_2 + a_2 b_1) - 2,$$
$$\sum_{\lambda,k} \alpha_{\lambda k}\beta_{k\lambda} = m' + \sum_k b'_k \sigma'_k + \sum_k b'' \tau'_k + m' + 2(a_1 b_2 + a_2 b_1) - 2.$$

Da in diesen Gleichungen die linken Seiten sich nur in der Bezeichnung der Summationsbuchstaben unterscheiden, so folgt

$$m = m',$$

also der behauptete Satz. Dieser Satz tritt an die Stelle des von *Clebsch* angegebenen Satzes, daß die Zahl der Fundamentalpunkte in beiden Ebenen dieselbe sei. Daß dieser Satz allgemein nicht richtig ist, zeigt das Beispiel am Schlusse der Arbeit. Der Satz wird wieder richtig, wenn man über-

einkommt, jeden Fundamentalpunkt so oft zu zählen, als Primteiler zweiter Art zu ihm gehören.

Den von *Clebsch* mit α_{ik} bezeichneten Größen entsprechen hier die Größen α_{ik} und β_{ik}, die durch die Gleichungen (b.) mit einander verbunden sind. Wir können hier das Produkt der Determinante $|\alpha_{ik}|$ und $|\beta_{ik}|$ in ähnlicher Weise berechnen wie *Clebsch* das Quadrat von $|\alpha_{ik}|$ berechnet. Unter Benutzung der Gleichungen (b.) wird nämlich

$$|\alpha_{ik}| \cdot |\beta_{ik}| = \begin{vmatrix} a_1'\sigma_1+a_1''\tau_1+1 & a_1'\sigma_2+a_1''\tau_2 & a_1'\sigma_3+a_1''\tau_3 & \cdots \\ a_2'\sigma_1+a_2''\tau_1 & a_2'\sigma_2+a_2''\tau_2+1 & a_2'\sigma_3+a_2''\tau_3 & \cdots \\ a_3'\sigma_1+a_3''\tau_1 & a_3'\sigma_2+a_3''\tau_2 & a_3'\sigma_3+a_3''\tau_3+1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Die Determinante auf der rechten Seite bezeichnen wir mit $\Delta(1,2,\ldots m)$. Wir zerlegen sie in die Summe von drei Determinanten, die aus $\Delta(1,2,\ldots m)$ dadurch hervorgehen, daß man die erste Vertikalreihe ersetzt der Reihe nach durch 1.) $a_1'\sigma_1,\ a_2'\sigma_1,\ldots a_m'\sigma_1$, 2.) $a_1''\tau_1, a_2''\tau_1,\ldots a_m''\tau_1$, 3.) $1, 0,\ldots 0$. Von diesen drei Determinanten ist die erste durch σ_1 teilbar, da die erste Vertikalreihe es ist. Wir bezeichnen diese Determinante mit $\sigma_1\Delta_1$, die zweite, die durch τ_1 teilbar ist, bezeichnen wir mit $\tau_1\Delta_2$. Die dritte reduziert sich auf eine Determinante $(m-1)$-ten Grades, die gerade so gebildet ist wie $\Delta(1,2,\ldots m)$, und die daher zu bezeichnen ist mit $\Delta(2,3,\ldots m)$. Wir haben also

$$\Delta(1,2,\ldots m) = \sigma_1\Delta_1+\tau_1\Delta_2+\Delta(2,3,\ldots m).$$

Der Determinante Δ_1 können wir dadurch, daß wir die der Reihe nach mit $\sigma_2,\sigma_3,\ldots\sigma_m$ multiplizierte erste Vertikalreihe der Reihe nach von den folgenden Vertikalreihen subtrahieren, die Form geben

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1' & a_1''\tau_2 & a_1''\tau_3 & a_1''\tau_4 & \cdots \\ a_2' & a_2''\tau_2+1 & a_2''\tau_3 & a_2''\tau_4 & \cdots \\ a_3' & a_3''\tau_2 & a_3''\tau_3+1 & a_3''\tau_4 & \cdots \\ a_4' & a_4''\tau_2 & a_4''\tau_3 & a_4''\tau_4+1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante dividieren wir die erste Horizontalreihe durch a_1'' und multiplizieren die erste Vertikalreihe mit a_1''. Dann subtrahieren wir der Reihe nach die der Reihe nach mit $a_2'', a_3'',\ldots a_m''$ multiplizierte erste Horizontalreihe von den folgenden Reihen. Setzen wir zur Abkürzung

$$a_i'a_k''-a_i''a_k' = a_{ik} = -a_{ki},$$

so bekommen wir

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1' & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \cdots \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \cdots \\ a_{31} & 0 & 1 & 0 \cdots \\ a_{41} & 0 & 0 & 1 \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta_1 = a_1' - \tau_2 a_{21} - \tau_3 a_{31} - \cdots - \tau_m a_{m1}.$$

Ganz ebenso findet man

$$\Delta_2 = a_1'' + \sigma_2 a_{21} + \sigma_3 a_{31} + \cdots + \sigma_m a_{m1}.$$

Also ist

$$\Delta(1,2,\ldots m) = a_1'\sigma_1 + a_1''\tau_1 - (\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1)a_{21} - \cdots - (\sigma_1\tau_m - \tau_m\sigma_1)a_{m1} + \Delta(2,3,\ldots m)$$

oder, wenn wir noch setzen

$$\sigma_i\tau_k - \sigma_k\tau_i = \sigma_{ik} = -\sigma_{ki},$$

$$\Delta(1,2,\ldots m) = a_1'\sigma_1 + a_1''\tau_1 + \Sigma\sigma_{1\lambda}a_{1\lambda} + \Delta(2,3,\ldots m).$$

In dieser Gleichung hängt $\Delta(2,3,\ldots m)$ vom Index 1 gar nicht ab. Die Determinante $\Delta(1,2,\ldots m)$ hängt aber von den Indizes symmetrisch ab. Daraus folgt, daß wir setzen können

$$\Delta(1,2,\ldots m) = \sum_{\mu}(a_\mu'\sigma_\mu + a_\mu''\tau_\mu) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}\sigma_{\mu\lambda}a_{\mu\lambda} + k,$$

wo die zweite Summe rechts über λ und μ *unabhängig voneinander* (daher der Faktor $\frac{1}{2}$) von 1 bis m zu erstrecken ist, und wo k nicht mehr von den Indizes abhängt und eine absolute Zahl sein muß. Da aber für $\sigma_i = \tau_i = 0$ sich links 1 und rechts k ergibt, so folgt für k der Wert 1. Benutzen wir noch die Gleichungen (a.), so folgt

$$|\alpha_{ik}| \cdot |\beta_{ik}| = \Delta(1,2,\ldots m) = 2(a_1b_2 + a_2b_1) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}\sigma_{\mu\lambda}a_{\mu\lambda} - 1.$$

Es ist

$$\sum_{\lambda,\mu}\sigma_{\mu\lambda}a_{\mu\lambda} = \sum_{\lambda,\mu}(\sigma_\mu\tau_\lambda - \sigma_\lambda\tau_\mu)(a_\mu'a_\lambda'' - a_\mu''a_\lambda')$$

$$= \sum_{\mu}\sigma_\mu a_\mu' \sum_{\lambda}\tau_\lambda a_\lambda'' - \sum_{\mu}\sigma_\mu a_\mu'' \sum_{\lambda}\tau_\lambda a_\lambda' + \sum_{\lambda}\sigma_\lambda a_\lambda' \sum_{\mu}\tau_\mu a_\mu'' - \sum_{\lambda}\sigma_\lambda a_\lambda'' \sum_{\mu}\tau_\mu a_\mu'$$

oder nach den Gleichungen (a.)

$$\sum_{\lambda,\mu}\sigma_{\mu\lambda}a_{\mu\lambda} = 2(a_1b_2 + a_2b_1 - 1)^2 - 8a_1a_2b_1b_2.$$

Daher wird

$$|\alpha_{ik}| \cdot |\beta_{ik}| = 2(a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_2 + a_2b_1 - 1)^2 - 4a_1a_2b_1b_2 - 1,$$

(c.)
$$|\alpha_{ik}| \cdot |\beta_{ik}| = (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (7.) von *Clebsch*. Die Determinante $|\alpha_{ik}|\cdot|\beta_{ik}|$ kann nach Formel (c.) sehr wohl gleich Null werden. Es gibt sogar Transformationen, bei denen $a_1 = a_2 = b_1 = b_2$. Solche sind z. B. die von *Clebsch* betrachteten im allgemeinen. Die Gleichung (c.) steht aber trotzdem nicht im Widerspruch zu der Formel (7.) von *Clebsch*. Bei den Transformationen, die *Clebsch* betrachtet, ist nämlich der Punkt $x = y = \infty$ immer ein Fundamentalpunkt. Da dieser aber ganz unbeachtet gelassen wird, so sind auch die sich auf ihn beziehenden Größen α_{ik} nicht in die Determinante aufgenommen.

Es ist $\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{F} - k\mathfrak{F}_1$ von der Ordnung b_2, b_1 (siehe Nr. XVI), also

$$\mathfrak{L}_1' \backsim \Lambda_1'^{b_2} M_1'^{b_1}.$$

Nach den Formeln (39.) und (40.) der Nr. XIII und (I.), (II.), (III.) der Nr. VIII ist

$$\mathfrak{L}_1' = \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s\mathfrak{A}_1}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s\mathfrak{A}_2}\right)^{\sigma_2}\cdots\left(\frac{\mathfrak{A}_m}{s\mathfrak{A}_m}\right)^{\sigma_m}\mathfrak{L}_1, \quad \Lambda_1'^{b_2} M_1'^{b_1} = \left(\frac{\Lambda_1}{s\Lambda_1}\right)^{b_2}\left(\frac{M_1}{sM_1}\right)^{b_1}.$$

Da äquivalente Divisoren wieder in äquivalente übergehen, also in dem Primteiler zweiter Art übereinstimmen, so ist

$$(s\Lambda_1)^{b_2}(sM_1)^{b_1} = (s\mathfrak{A}_1)^{\sigma_1}(s\mathfrak{A}_2)^{\sigma_2}\cdots(s\mathfrak{A}_m)^{\sigma_m},$$

woraus sich durch Vergleich der Exponenten von $\mathfrak{b}_k$ rechts und links die erste der folgenden Gleichungen ergibt, zu der wir sogleich drei andere analog gebildete hinzufügen:

$$\text{(d.)} \quad \begin{cases} \sigma_1\alpha_{1k} + \sigma_2\alpha_{2k} + \cdots + \sigma_m\alpha_{mk} = b_2\sigma_k' + b_1\tau_k', \\ \tau_1\alpha_{1k} + \tau_2\alpha_{2k} + \cdots + \tau_m\alpha_{mk} = a_2\sigma_k' + a_1\tau_k', \\ \sigma_1'\beta_{1k} + \sigma_2'\beta_{2k} + \cdots + \sigma_m'\beta_{mk} = a_1\sigma_k + b_1\tau_k, \\ \tau_1'\beta_{1k} + \tau_2'\beta_{2k} + \cdots + \tau_m'\beta_{mk} = a_2\sigma_k + b_2\tau_k. \end{cases}$$

Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen (2.) von *Clebsch*.

XX.

Ich will, soweit das nicht schon in der vorigen Nummer geschehen ist, noch kurz auf die Sätze eingehen, die *Clebsch* in seiner Arbeit angibt, und sehen, wie weit sie im allgemeinen Falle gelten.

Clebsch gibt an (Seite 492 oben), Fundamentalkurven schneiden sich nur in Fundamentalpunkten. Dieser Satz ist allgemein nicht richtig, wie das Beispiel am Schlusse zeigt. Wir können nur sagen:

a) Auf jeder Fundamentalkurve liegt mindestens ein Fundamentalpunkt.

In unserer Bezeichnung sagt dieser Satz aus, es ist für jedes $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{A}_i$

$$s\mathfrak{B}_i \neq 1, \quad s\mathfrak{A}_i \neq 1.$$

Wäre z. B. $s\mathfrak{B}_i = 1$, so wäre für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots m$

$$\beta_{1\lambda} = 0.$$

Dann würde aus der zweiten der Gleichungen (b.) der vorigen Nummer folgen für $i = k$

(95.) $$b_i' \sigma_i' + b_i'' \tau_i' + 1 = 0,$$

was unmöglich ist, da die Größen $b_i', \sigma_i', b_i'' \tau_i'$ nicht negativ sein können. Es gilt auch der Satz, der die Umkehrung von a) darstellt, nämlich

a′) Durch jeden Fundamentalpunkt geht mindestens eine Fundamentalkurve.

Das besagt, es ist nicht für alle $\lambda = 1, 2, \ldots m$

$$\alpha_{\lambda i} = 0 \text{ oder } \beta_{\lambda i} = 0.$$

Wäre etwa das erste der Fall, so würde wieder aus der zweiten der Gleichungen (b.) der vorigen Nummer für $i = k$ die Gleichung (95.) folgen.

Ferner gibt *Clebsch* auf Seite 492 den Satz an, die k-te Fundamentalkurve der xy-Ebene geht ebenso oft durch den i-ten Fundamentalpunkt der $\xi\eta$-Ebene wie die i-te Fundamentalkurve der $\xi\eta$-Ebene durch den k-ten Fundamentalpunkt der xy-Ebene. Auch dieser Satz bleibt nicht richtig. Der Satz, der an seine Stelle tritt, ist der Satz, der durch die Formel (87.) der Nr. XVIII ausgedrückt ist, nämlich durch die Formel

(e.) $$(\mathfrak{a}_i, s\mathfrak{B}_k) = (s\mathfrak{A}_i, \mathfrak{b}_k).$$

Beide Sätze geben einen Zusammenhang zwischen Fundamentalpunkten und -kurven der einen Ebene und den ihnen entsprechenden Fundamentalkurven und -punkten der anderen Ebene. Auch gibt (e.) sofort den von *Clebsch* angegebenen Satz, sobald man die einfachen Voraussetzungen von *Clebsch* einführt. Der in (e.) enthaltene Satz läßt sich auch geometrisch deuten. Doch will ich das dem Leser überlassen.

Dem weiter unten auf Seite 492 von *Clebsch* gegebenen Satz 1) muß bei unseren Voraussetzungen folgende Fassung gegeben werden, wenn er richtig bleiben soll:

b) Die Kurven, die Bilder von Parallelen zu den Koordinatenachsen sind, werden von Fundamentalkurven nur in Fundamentalpunkten geschnitten.

Der Satz:

c) Die Fundamentalkurven sind vom Geschlechte Null.

bleibt bestehen, wie schon in der vorigen Nummer angegeben.

Der von *Clebsch* noch angegebene Satz 4 hat kein Analogon. Ob der Satz, den *Clebsch* am Schlusse seiner Arbeit beweist, ein Analogon hat, kann ich leider nicht sagen. Es ist folgender Satz: Bedeuten r_i die Ordnungen der Fundamentalkurven in der einen Ebene und s_i die Ordnungen der Fundamentalkurven in der anderen Ebene, so sind die Zahlen, die angeben, wieviele unter den r_i immer einander gleich sind, abgesehen von der Reihenfolge gleich den Zahlen, die angeben, wieviele von den s_i immer gleich sind.

Zum Schluß sei noch kurz die Frage behandelt, welches die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß aus zwei Gleichungen

$$(96.) \qquad x=\frac{F(\xi,\eta)}{F_1(\xi,\eta)}, \quad y=\frac{G(\xi,\eta)}{G_1(\xi,\eta)},$$

in denen die F und G ganze rationale Funktionen der ξ,η sind, auch umgekehrt ξ und η als rationale Funktionen von x,y folgen.

Lassen sich ξ und η nicht rational durch x,y ausdrücken, so gibt es immer eine dritte rationale Funktion z von ξ,η, so daß durch x,y,z alle Funktionen des Körpers (ξ,η) sich rational ausdrücken lassen. Zwischen x,y,z besteht dann eine algebraische Gleichung. Ist diese in z vom Grade n, so schneiden sich zwei Ebenen $x=\text{konst}$, $y=\text{konst}$ in n Punkten der durch die Gleichung zwischen x,y,z definierten Fläche. Bezeichnen wir also wieder den Zähler von $x-k$ mit $\mathfrak{L}_1$ und den von $y-l$ mit $\mathfrak{M}_1$, wo $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ nur Primteiler in bezug auf x,y enthalten sollen, so ist $(\mathfrak{L}_1,\mathfrak{M}_1)=n$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß auch ξ,η rationale Funktionen von x,y werden, ist die, daß die Gleichung zwischen x,y,z in z vom ersten Grade ist, daß also $n=1$ oder

$$(\mathfrak{L}_1,\mathfrak{M}_1)=1.$$

Benutzen wir die Gleichungen (49.) der Nr. XIV und bedenken, daß $(\mathfrak{L}_1,\mathfrak{M}_1)=(\mathfrak{L},\mathfrak{M})$, so folgt

$$(97.) \qquad a_1b_2+a_2b_1+\sum_{\lambda,\mu}\sigma_\lambda\tau_\mu(\mathfrak{a}_\lambda,\mathfrak{a}_\mu)=1.$$

als die gesuchte Bedingung. In dieser Gleichung sind alle Größen zu berechnen, sobald die Funktionen (96.) gegeben sind, und zwar ohne daß man nötig hat die Gleichungen (96.) etwa nach ξ,η aufzulösen. Durch Benutzung der zweiten der Gleichungen (58.) der Nr. XV und der Gleichung (48.) der Nr. XIV können wir unserer Bedingungsgleichung (97.) die Form geben

$$a_1b_2+a_2b_1-\sum_{\lambda,\mu}a'_\lambda a''_\mu[\lambda,\mu]=1,$$

eine Gleichung, die einfach aussagt, daß die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der beiden Kurvenscharen

$$F_1(\xi,\eta)-kF(\xi,\eta)=0 \text{ und } G_1(\xi,\eta)-lG(\xi,\eta)=0$$

gleich 1 sein muß — ein Resultat, das geometrisch sofort einleuchtet.

XXI.

Werden x und y für $\mathfrak{B}_1=0$ zu x_0, y_0, so sind die Funktionen $F-x_0F_1$ und $G-y_0G_1$ durch B_1 teilbar, wenn wie früher $B_1(\xi,\eta)$ diejenige ganze rationale Funktion von ξ,η ist, deren Zähler $\mathfrak{B}_1$ ist. Entwickeln wir also $x-x_0$ und $y-y_0$ nach Potenzen von B_1 mit Koeffizienten, die algebraische Funktion von ξ sind, so haben wir

$$x-x_0=a_1B_1^{\varepsilon_1}+a_2B_1^{\varepsilon_2}+\cdots, \quad y-y_0=b_1B_1^{\delta_1}+b_2B_1^{\delta_2}+\cdots^*),$$

wo die ε und δ ganze positive Zahlen und wo $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\ldots$, $0<\delta_1<\delta_2\ldots$. Daraus folgt, daß die Funktionaldeterminante $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ durch B_1 teilbar wird. Untersucht man noch die Stellen, wo x,y,ξ,η unendlich werden, so ergibt sich das Resultat: Es läßt sich $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ in der Form darstellen

$$(98.) \qquad \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\frac{\mathfrak{B}_1^{\beta_1}\mathfrak{B}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{B}_m^{\beta_m}\mathfrak{A}'^2\mathfrak{M}'^2}{\mathfrak{L}'^2\mathfrak{M}'^2}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{A}'^2\mathfrak{M}'^2}{\mathfrak{L}'^2\mathfrak{M}'^2},$$

wo $\mathfrak{B}$ zur Abkürzung eingeführt ist. Hierin sind die β_i alle größer als 0.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß

$$s\mathfrak{A}'=s\mathfrak{M}'=s\mathfrak{L}=s\mathfrak{M}=1.$$

Das läßt sich durch eine lineare Transformation immer erreichen. Es ist dann

$$\mathfrak{L}=\frac{\mathfrak{L}'}{s\mathfrak{L}'}, \quad \mathfrak{M}=\frac{\mathfrak{M}'}{s\mathfrak{M}'}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{s\mathfrak{B}}=\mathfrak{b},$$

wo gesetzt ist

$$(99.) \qquad \mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1^{\beta_1}\mathfrak{b}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{b}_m^{\beta_m}.$$

Mit diesen Gleichungen folgt aus (98.)

$$(100.) \qquad \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\frac{\mathfrak{b}s\mathfrak{B}}{s\mathfrak{L}'^2s\mathfrak{M}'^2}\frac{\mathfrak{A}'^2\mathfrak{M}'^2}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}=\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\frac{\mathfrak{A}'^2\mathfrak{M}'^2}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2},$$

wenn gesetzt wird

---

*) Es sei hier folgendes bemerkt: Durch Elimination von B_1 kann man aus diesen Gleichungen $y-y_0$ als Potenzreihe von $x-x_0$ darstellen, deren Koeffizienten von ξ abhängen. Bricht man diese Entwicklung mit dem ersten Gliede ab, dessen Koeffizient von ξ wirklich abhängt, und ersetzt diesen Koeffizienten durch t, so hat man die Entwicklung, die uns den Primteiler $\mathfrak{b}_1$ definiert, also eine Wurzel der Gleichung $B_1=0$.

(101.) $$\mathfrak{a} = \frac{s\mathfrak{L}'^2 s\mathfrak{M}'^2}{s\mathfrak{B}}.$$

Setzen wir

(102.) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^{a_1}\mathfrak{a}_2^{a_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{a_m},$$

so folgen aus (101.) die Gleichungen

(103.) $$\alpha_\mu = 2\sigma_\mu + 2\tau_\mu - \sum_\lambda \beta_\lambda \beta_{\lambda\mu}.$$

Aus Symmetrierücksichten bestehen dann auch die Gleichungen

(103ª.) $$\beta_\varkappa = 2\sigma'_\varkappa + 2\tau'_\varkappa - \sum_\mu \alpha_\mu \alpha_{\mu\varkappa}.$$

Setzen wir den Wert von α_μ aus (103.) in (104.) ein, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichungen (b.) und (d.) der Nr. XIX

$$\sum_\lambda \beta_\lambda (b'_\lambda \sigma'_\varkappa + b''_\lambda \tau'_\varkappa) = 2\sigma'_\varkappa(a_1 + a_2 - 1) + 2\tau'_\varkappa(b_1 + b_2 - 1).$$

Diese Gleichungen für die β_λ bestimmen die β_λ im allgemeinen nicht, da die Determinante der Koeffizienten gleich Null sein kann und sogar für $m \geqq 3$ immer identisch verschwindet. Die entsprechenden Gleichungen bestehen natürlich auch für die α_λ. Die Gleichungen lassen sich leicht noch auf andere Weise bestätigen. Wir können sie schreiben

$$\sigma'_\varkappa\left(\sum_\lambda \beta_\lambda b'_\lambda - 2a_1 - 2a_2 + 2\right) + \tau'_\varkappa\left(\sum_\lambda \beta_\lambda b''_\lambda - 2b_1 - 2b_2 + 2\right) = 0.$$

Hieraus kann man schon erwarten, daß die Faktoren von $\sigma'_\varkappa$ und $\tau'_\varkappa$ einzeln Null sind. Das ist nun tatsächlich der Fall. Aus der Gleichung (98.) folgt nämlich die Äquivalenz

$$\mathcal{A}'^2 M'^2 \mathfrak{B}_1^{\beta_1}\mathfrak{B}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{B}_m^{\beta_m} \sim \mathfrak{L}'^2\mathfrak{M}'^2.$$

Also ist

$$(\mathfrak{B}_1^{\beta_1}\mathfrak{B}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{B}_m^{\beta_m}\mathcal{A}'^2 M'^2, M') = (\mathfrak{L}'^2\mathfrak{M}'^2, M'),$$

$$\sum_\lambda \beta_\lambda b'_\lambda + 2 = 2a_1 + 2a_2.$$

Analog folgt

$$\sum_\lambda \beta_\lambda b''_\lambda + 2 = 2b_1 + 2b_2.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen (a′.) auf S. 304, so wird man zu der Vermutung geführt, daß die einfachen Gleichungen

(104.) $$\alpha_i = \alpha'_i + \alpha''_i - 1, \quad \beta_i = \beta'_i + \beta''_i - 1$$

bestehen, wo (α'_i, α''_i) die Ordnung der Eichfunktion A_i von $\mathfrak{a}_i$ und (β'_i, β''_i) die Ordnung der Eichfunktion B_i von $\mathfrak{b}_i$ ist. Die direkte Berechnung der Exponenten α_i, β_i unter Berücksichtigung der Anmerkung auf Seite 310 bestätigt diese Vermutung.

Die Klassen

$$(105.) \qquad \mathfrak{W} = (\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}), \quad (\mathfrak{W}') = (A'^{-2}M'^{-2})$$

werden als Differentialklassen bezeichnet, die eine für x, y, die andere für ξ, η. Aus der Gleichung (100.) folgt, da $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ eine Funktion des Körpers x, y oder ξ, η ist,

$$(106.) \qquad \mathfrak{W}\mathfrak{b} \backsim \mathfrak{W}'\mathfrak{a}.$$

Die Differentialklasse ist also bei birationalen Transformationen nicht invariant, wie das bei algebraischen Funktionen einer Veränderlichen der Fall ist. Weiter folgt

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{b}, \mathfrak{W}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{W}'\mathfrak{a}, \mathfrak{W}'\mathfrak{a}) \text{ oder } (\mathfrak{W}, \mathfrak{W}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{W}', \mathfrak{W}') + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

Da $(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}) = (\mathfrak{W}', \mathfrak{W}') = -4$, wie man durch einfache Ausrechnung findet, so ist

$$(107.) \qquad (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

Diese Gleichung läßt sich aber auch direkt nachweisen durch Benutzung der für die β_i und α_i abgeleiteten Gleichungen (103.) und (103ª.). Doch will ich das dem Leser überlassen.

XXII.

Zum Schluß will ich kurz ein einfaches numerisches Beispiel geben. Wir gehen aus von den Gleichungen

$$(108.) \qquad x = \frac{\eta - \xi^2}{\xi^2} = \frac{F}{F_1}, \quad y = \frac{(\eta - \xi^2)(\eta - \xi)}{\xi^3} = \frac{G}{G_1},$$

die nach ξ, η aufgelöst ergeben

$$(109.) \qquad \xi = \frac{x + y}{x(x+1)} = \frac{H}{H_1}, \quad \eta = \frac{(x+y)^2}{x^2(x+1)} = \frac{K}{K_1}.$$

Die Ordnungen der Funktionen $F - kF_1$, $G - lG_1$, $H - \varkappa H_1$, $K - \lambda K_1$ haben wir der Reihe nach bezeichnet mit $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (a_1, b_1), (a_2, b_2)$. Es ist also

$$(110.) \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1; \quad \alpha_2 = 3, \beta_2 = 2; \\ &a_1 = 2, b_1 = 1; \quad a_2 = 3, b_2 = 2. \end{aligned}$$

Wir betrachten weiter zunächst die Gleichung

$$(111.) \qquad F - kF_1 \equiv \eta - \xi^2 - k\xi^2 = 0.$$

Diese hat von k unabhängige Nullstellen im Punkte $\xi = \eta = 0$ und $\xi = \eta = \infty$. Die Gleichung

(112.) $$G-lG_1\equiv(\eta-\xi^2)(\eta-\xi)-l\xi^3=0$$

hat auch nur an diesen Stellen von l unabhängige Nullstellen. Es gibt also in der $\xi\eta$-Ebene nur die beiden Fundamentalpunkte $\xi=\eta=0$ und $\xi=\eta=\infty$.

Im Punkte $\xi=\eta=0$ haben wir

$$F-kF_1=\eta-\xi^2-k\xi^2,$$

also nur die eine Wurzel

$$\eta=\xi^2(1-k)$$

und danach als Eichfunktion für einen Primteiler zweiter Art, den wir mit $\mathfrak{a}_1$ bezeichnen.

$$A_1\equiv\eta-t\xi^2.$$

Ferner wird

$$G-lG_1=(\eta-(1-l)\xi^2+\cdots)(\eta-\xi-l\xi^2+\cdots).$$

Die Entwicklungen brauchen, wie wir wissen, nur fortgesetzt zu werden bis zum ersten Gliede, das vom Parameter l abhängt. Der erste Faktor von $G-lG_1$ führt wieder zu A_1. Der zweite Faktor definiert einen neuen Primteiler zweiter Art, den wir $\mathfrak{a}_2$ nennen. Seine Eichfunktion ist

$$A_2\equiv\eta-\xi-t\xi^2.$$

Andere Primteiler zweiter Art liefert uns die Stelle $\xi=\eta=0$ nicht.

Wir setzen, um die Stelle $\xi=\eta=\infty$ zu untersuchen $\xi^{-1}=\xi'$, $\eta^{-1}=\eta'$. Dann haben wir aus (111.) die Gleichung

(113.) $$\eta'(1+k)-\xi'^2\equiv(1+k)\left(\eta'-\frac{\xi'^2}{1+k}\right)=0,$$

also als Eichfunktion für einen dritten Primteiler $\mathfrak{a}_3$ zweiter Art

$$A_3\equiv\eta'-t\xi'^2.$$

Aus (112.) bekommen wir

(114.) $$\eta'^2-\eta'\frac{\xi'(1+\xi')}{1-l}+\frac{\xi'^3}{1-l}\equiv\left(\eta'-\frac{\xi'}{1-l}+\cdots\right)(\eta'-\xi'^2+l\xi'^3+\cdots).$$

Dies liefert uns zwei neue Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{a}_5$. Ihre Eichfunktionen sind

$$A_4\equiv\eta'-t\xi',\quad A_5\equiv\eta'-\xi'^2-t\xi'^3.$$

Weitere Primteiler zweiter Art in bezug auf ξ,η gibt es nicht.

Wollen wir sehen, was aus x und y wird für $\mathfrak{a}_1=0$, so haben wir zunächst in (108.) für η den aus $A_1=0$ folgenden Wert zu setzen und dann nach gehöriger Reduktion $\xi=0$. Das gibt

$$x=t-1, \quad y=-(t-1),$$

so daß für $\mathfrak{a}_1=0$ zwischen x und y die Gleichung $x+y=0$ besteht. Danach ist $\mathfrak{A}_1$ der Zähler von $x+y$ und also $a_1'=1, a_1''=1$. Entsprechend sind $\mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_5$ zu bestimmen. Man findet so

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_1 \therefore x+y=0, a_1'=1, a_1''=1, \quad \mathfrak{A}_2 \therefore x=\infty, \quad a_2'=1, a_2''=0, \\ (115.)\quad &\mathfrak{A}_3 \therefore y=\infty, \quad a_3'=0, a_3''=1, \quad \mathfrak{A}_4 \therefore x+1=0, a_4'=1, a_4''=0, \\ &\mathfrak{A}_5 \therefore x=0, \; a_5'=1, a_5''=0. \end{aligned}$$

Um die Größen $[k,i]$, $(i,k=1,2,\ldots 5)$ zu bestimmen, haben wir folgendes zu beachten.

Es ist $[1,3]=[1,4]=[1,5]=0$, weil die Primteiler $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$ nicht zu derselben Stelle gehören wie $\mathfrak{a}_1$. Ebenso ist $[2,3]=[2,4]=[2,5]=0$. Um $[i,k]$ für $(i,k=1,2)$ zu bestimmen, haben wir den Wert von η aus $A_i=0$ in $A_k(t_1)$ einzusetzen und zu sehen, durch welche Potenz von ξ — die in Betracht kommenden Wurzeln schreiten hier nach ganzen Potenzen von ξ fort — $A_k(t_1)$ teilbar wird. So finden wir $[1,1]=2, [1,2,]=[2,1]=1$, $[2,2]=2$. Bestimmen wir die übrigen Größen $[i,k]$ in analoger Weise, so bekommen wir

$$(116.)\qquad ([i,k])=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad |[i,k]|=3.$$

Da $((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k))$ das reziproke System zu $(-[i,k])$ ist, so folgt

$$(117.)\qquad ((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k))=\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Wollen wir σ_1 bestimmen, so haben wir in (111.) den Wert von η aus $A_1=0$ einzusetzen und zu sehen, durch welche Potenz von ξ $F-kF_1$ bei beliebigem k und t teilbar wird. Das gibt $\sigma_1=2$. Um τ_3 zu bestimmen, haben wir in der Funktion (114.) für η' den Wert aus $A_3=0$ einzuführen und zu sehen, durch welche Potenz von ξ' die Funktion dann teilbar wird

bei beliebigem l und t. So finden wir $\tau_3 = 3$. Ebenso sind die anderen σ und τ zu bestimmen. Wir bekommen so

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = 2,\ \sigma_4 = 1,\ \sigma_5 = 2, \\ &\tau_1 = 3,\ \tau_2 = 3,\ \tau_3 = 3,\ \tau_4 = 2,\ \tau_5 = 4. \end{aligned} \tag{118.}$$

Wie wir mit der $\xi\eta$-Ebene verfahren sind, können wir auch mit der xy-Ebene verfahren. Ich gebe nur die Resultate an. Wir haben hier drei Fundamentalpunkte, nämlich $x = y = 0$; $x = -1$, $y = +1$; $x = y = \infty$. Zum ersten gehört ein Primteiler $\mathfrak{b}_1$, zum zweiten gehören zwei, $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$, zum dritten auch zwei, $\mathfrak{b}_4$ und $\mathfrak{b}_5$. Die Eichfunktionen sind, wenn $x^{-1} = x'$ und $y^{-1} = y'$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &B_1 \equiv y - tx; \\ &B_2 \equiv y - 1 - (x+1)t, \quad B_3 \equiv (y-1)^2 - (x+1)t^2; \\ &B_4 \equiv y' - tx'^2, \qquad\qquad B_5 \equiv y'^2 - t^2 x'^3. \end{aligned}$$

Bei $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{b}_5$ tritt der Fall ein, daß die Größe t nicht selbst eine Funktion der Körper $\overline{\mathfrak{B}}_3$ und $\overline{\mathfrak{B}}_5$ ist. Z. B. wird für $\mathfrak{b}_3 = 0$

$$\xi = \infty, \quad \eta = t^2.$$

Es werden also für $\mathfrak{b}_3 = 0$ alle Funktionen rationale Funktionen von t^2, so daß erst t^2 eine Funktion des Körpers $\overline{\mathfrak{B}}_3$ ist. Für die $\mathfrak{B}_i$ finden wir in ähnlicher Bezeichnung wie oben bei den $\mathfrak{A}_i$:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B}_1 \ddots \eta - \xi^2 = 0,\ b_1' = 2,\ b_1'' = 1; \quad \mathfrak{B}_2 \ddots \eta = 0,\ b_2' = 0,\ b_2'' = 1; \\ &\mathfrak{B}_3 \ddots \quad \xi = \infty,\ b_3' = 1,\ b_3'' = 0; \quad \mathfrak{B}_4 \ddots \eta = \infty,\ b_4' = 0,\ b_4'' = 1; \\ &\mathfrak{B}_5 \ddots \xi = 0,\ b_5' = 1,\ b_5'' = 0. \end{aligned} \tag{119.}$$

Ferner

$$([i,k]') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad |[i,k]'| = 3, \tag{120.}$$

$$((\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}, \tag{121.}$$

(122.) $$\sigma_1'=1,\ \sigma_2'=1,\ \sigma_3'=1,\ \sigma_4'=2,\ \sigma_5'=3;$$
$$\tau_1'=2,\ \tau_2'=1,\ \tau_3'=2,\ \tau_4'=3,\ \tau_5'=6.$$

$\mathfrak{A}_1$ ist der Zähler von $x+y$. Als zugeordnete Funktion für die Stelle $x=y=0$ können wir nehmen $x+y$. Setzen wir hierin den Wert von y aus $B_1=0$ ein, so bekommen wir

$$x+y=x(1+t),$$

also ist $\mathfrak{A}_1$ teilbar durch $\mathfrak{b}_1^1$ oder es ist $\alpha_{11}=1$. Für die Stelle $x=-1$, $y=1$ können wir als zugeordnete Funktion nehmen

$$(x+1)+(y-1).$$

Setzen wir hierin den Wert von y aus B_3 ein, so bekommen wir

$$(x+1)+(y-1)=(x+1)^{\frac{1}{2}}((x+1)^{\frac{1}{2}}+t).$$

Es wird also die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}_1$ teilbar durch $(x+1)^{\frac{1}{2}}$. Da in diesem Falle $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ eine Funktion erster Ordnung ist, so wird $\mathfrak{A}_1$ teilbar durch $\mathfrak{b}_3^1$, d. h. es ist $\alpha_{13}=1$. Für die Stelle $x=y=\infty$ wird, wenn wir setzen $x^{-1}=x'$, $y^{-1}=y'$

$$x+y=\frac{x'+y'}{x'y'}.$$

Also können wir als zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}_1$ für die Stelle $x=y=\infty$ nehmen $x'+y'$. Führen wir hierin den Wert von y' aus B_5 ein, so haben wir

$$x'+y'=x'(1+x'^{\frac{1}{2}}t).$$

Es wird die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}_1$ durch x' teilbar. Da $x'^{\frac{1}{2}}$ eine Funktion erster Ordnung ist, so ist $\mathfrak{A}_1$ teilbar durch $\mathfrak{b}_5^2$, d. h. es ist $\alpha_{15}=2$. In entsprechender Art sind die anderen α_{ik} und β_{ik} zu bestimmen. Man findet

(123.) $$(\alpha_{1k},\alpha_{2k},\dots\alpha_{5k})=\begin{vmatrix}1&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\1&0&0&2&0\\1&1&2&0&0\\2&2&3&0&0\end{vmatrix},\quad |\alpha_{ik}|=-1.$$

(124.) $$(\beta_{1k},\beta_{2k},\dots\beta_{5k})=\begin{vmatrix}2&2&0&0&1\\1&1&0&0&1\\2&0&1&2&0\\1&0&1&1&0\\3&0&1&2&2\end{vmatrix},\quad |\beta_{ik}|=1.$$

Aus den Gleichungen (108.) folgt

$$(125.)\qquad \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = -\frac{\eta(\eta-\xi^2)}{\xi^6} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3^4}{\mathfrak{B}_4^2\mathfrak{B}_5^6}.$$

Dies muß sich in der Form darstellen lassen

$$(126.)\qquad \frac{\mathfrak{B}_1^{\beta_1}\mathfrak{B}_2^{\beta_2}\dots\mathfrak{B}_5^{\beta_5}\quad {}'^2 M'^2}{\mathfrak{L}'^2\mathfrak{M}'^2}.$$

In unserem Falle ist

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}_3,$$

also

$$s\mathfrak{L} = \mathfrak{b}_1^{\alpha_{21}}\dots\mathfrak{b}_5^{\alpha_{25}} = \mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5^2, \quad s\mathfrak{M} = \mathfrak{b}_4^2\mathfrak{b}_5^3.$$

Daher geht bis auf Primteiler zweiter Art $\mathfrak{L}$ über in $\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5^2$ und $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{B}_4^2\mathfrak{B}_5^3$, d. h. es ist

$$(127.)\qquad \mathfrak{L}' = \mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5^2, \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{B}_4^2\mathfrak{B}_5^3.$$

Ferner ist hier

$$(128.)\qquad M' = \mathfrak{B}_3, \quad M' = \mathfrak{B}_4.$$

Aus (125.) bis (128.) folgt

$$\frac{\mathfrak{B}_1^{\beta_1}\mathfrak{B}_2^{\beta_2}\dots\mathfrak{B}_5^{\beta_5}\mathfrak{B}_3^2\mathfrak{B}_4^2}{\mathfrak{B}_4^6\mathfrak{B}_5^{10}} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3^4}{\mathfrak{B}_4^2\mathfrak{B}_5^6},$$

also

$$(129.)\qquad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 2,\ \beta_5 = 4.$$

Da $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, M', M'$ hier zu den singulären Primteilern gehören, so läßt sich die Funktionaldeterminante durch singuläre Primteiler allein darstellen. Das ist natürlich nicht immer der Fall.

Es ist allgemein

$$\frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i} = \mathfrak{b}_i, \quad \mathfrak{B}_i = \mathfrak{b}_i\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s\mathfrak{A}_1}\right)^{\beta_{i1}}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s\mathfrak{A}_2}\right)^{\beta_{i2}}\dots\left(\frac{\mathfrak{A}_m}{s\mathfrak{A}_m}\right)^{\beta_{im}}.$$

Wir können also mit Benutzung der Tabellen (123.) und (124.) für die α_{ik} und β_{ik} leicht angeben, was aus den $\mathfrak{B}_i$ wird. So wird z. B.

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{b}_1\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s\mathfrak{A}_1}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s\mathfrak{A}_2}\right)\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{s\mathfrak{A}_3}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{A}_4}{s\mathfrak{A}_4}\right)\left(\frac{\mathfrak{A}_5}{s\mathfrak{A}_5}\right)^3 = \frac{\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3^2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5^3}{\mathfrak{b}_1^4\mathfrak{b}_2^3\mathfrak{b}_3^4\mathfrak{b}_4^7\mathfrak{b}_5^{12}}.$$

Ebenso kann man bestimmen, worin die anderen $\mathfrak{B}_i$ bei der Transformation übergehen. Setzt man die gefundenen Werte in die Gleichung (125.) ein, so folgt

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \frac{\mathfrak{A}_3^2\mathfrak{A}_4^3\mathfrak{A}_5^3}{\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2^4}, \quad \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \frac{\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2^4}{\mathfrak{A}_3^2\mathfrak{A}_4^3\mathfrak{A}_5^3}.$$

Es heben sich also, wie es sein muß, die Primteiler zweiter Art fort. Unter Benutzung der in (115.) angegebenen Bedeutung der $\mathfrak{A}_i$ ergibt sich

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \text{konst} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^3(1+x)^3}.$$

Die direkte Berechnung bestätigt das Resultat und gibt für die Konstante den Wert -1.

Ähnlich, wie wir die β berechnet haben, oder einfacher nach Formel (104.) auf S. 311, können wir auch die α berechnen und finden

(130.) $$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 3,$$

so daß wir die Gleichung haben

$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3^2 \mathfrak{b}_4^2 \mathfrak{b}_5^4 \mathfrak{W} = \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2^2 \mathfrak{a}_3^2 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5^3 \mathfrak{W}'.$$

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 138.

Heft IV.

Ausgegeben den 2. August.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1910.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 16.—.

Band 138. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Jung, H. W. E., Über die *Cremona*sche Transformation der Ebene . . . Seite 255

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35

G. LEJEUNE DIRICHLETS WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften von L. KRONECKER. Fortgesetzt von L. FUCHS. Zwei Bände mit Dirichlets Bildnis. Band I Mark 21.—; Band II Mark 18.—

C.G.J. JACOBIS GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften.

Band I (1881) Mark 18.—; Band II (1882) Mark 17.—; Band III (1884) Mark 20.—; Band IV (1886) Mark 18.—; Band V (1890) Mark 16.—; Band VI (1891) Mark 14.—; Band VII (1891) Mark 14.—; Supplementband (1884) Mark 10.—

C.W. BORCHARDTS GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften von G. HETTNER. Mit Borchardts Bildnis. Mark 17.—

J. STEINERS GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften von K. WEIERSTRASS. Band I mit 44 Tafeln und Steiners Bildnis Mark 16.—. Band II mit 23 Tafeln Mark 18.—

J. L. LAGRANGES MATHEMATISCHE WERKE.

Deutsch von A. L. CRELLE. 3 Bände. (Band III vergriffen.) Preis für Band I und II Mark 8.—

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35

NEUE RECHENTAFELN

FÜR MULTIPLIKATION UND DIVISION MIT ALLEN EIN- BIS VIERSTELLIGEN ZAHLEN

HERAUSGEGEBEN VON

DR. J. PETERS

OBSERVATOR AM KÖNIGL. ASTRONOMISCHEN RECHENINSTITUT

Die Produkte aller Zahlen von 1—10000 mit allen Zahlen von 1—10000 in einer Multiplikationstafel so gegenwärtig zu haben, daß jedes dieser Hundert Millionen Produkte beim Aufschlagen der betreffenden Seite in einer fertigen und mit einem einzigen Blicke ablesbaren Lösung herausspränge, das wird ein am Raum scheiternder Wunsch zahlloser Rechner immer bleiben. Aber wenn man eine Annäherung an die Verwirklichung dieses Problems und eine ganz eminente Vereinfachung der Rechnung darin erblickt, daß man jedes Produkt zweier vierstelligen Zahlen oder einer drei- mit einer vierstelligen Zahl durch einmaliges Aufschlagen und einmaliges Addieren zweier in der gleichen Vertikalreihe derselben Seite befindlichen Ziffern erhält, dann bedeutet diese neue Tafel, die sich hinsichtlich der Durchsichtigkeit und Klarheit der Anlage die Crelle'sche zum Vorbild genommen hat, einen ganz bedeutenden Fortschritt.

Für Finanz- und Bau-Behörden, Kataster- und Steuerämter, Berufsgenossenschaften, Astronom. Institute, Banken, Sparkassen, große industr. Etablissements, Versicherungs-Gesellschaften, Eisenbahn-Direktionen, Hüttenwerke, Maschinenfabriken, Brückenbau- und Konstruktionsanstalten, Schiffswerften etc.

unentbehrliches Hilfsmittel.

Umfang 500 Seiten

Preis solid in Ganzleinen geb. M. 15.—

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35